Exercice 01 : 4,5 points

soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 5$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) calculer u_1 et u_2

2.a) montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n < 15$

2.b) montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 5$

2.c) vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $-\frac{1}{3}u_n + 5 > 0$

2.d) en déduire que (u_n) est croissante et qu'elle est convergente

3) on pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - 15$

3.a) montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

3.b) calculer v_0 et montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = (-12)\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

4) calculer u_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 02 : 4,5 points

Tous les résultats seront donnés sous forme de fraction

Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges, 3 boules blanches et 2 boules vertes On tire simultanément au hasard trois boules du sac

On considère les événements suivants :

A : «les trois boules tirées sont blanches»

B «les trois boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux»

C : «il n'y a aucune boule blanche parmi les trois boules tirées»

1.a) montrer que $p(A) = \frac{1}{56}$

1.b) calculer $p(B)$ et $p(C)$

2) soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules blanches tirées.

2.a) copier et remplir le tableau ci- contre en justifiant les réponses

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$				

2.b) calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

Exercice 03 : 11 points

Partie I

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-\dfrac{1}{x}+\ln x$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat

2.a) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2.b) montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=1$

2.c) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ et interpréter géométriquement

3.a) montrer que : $\forall x>0,\ f'(x)=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$

3.b) calculer $f(1)$ puis dresser le tableau de variations de f

3.c) en déduire le signe de f sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$

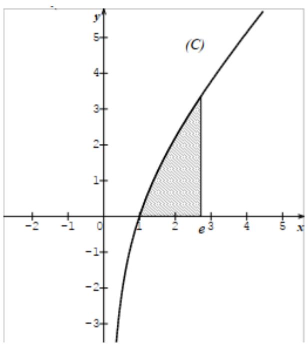
3.d) déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) point d'abscisse 1

4) dans la figure (C) est courbe de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

4.a) en utilisant une intégratior par parties, m que $\int_1^e \ln(x)\,dx=1$

4.b) montrer que l'aire de la partie hachurée est égale à $\dfrac{1}{2}(e^2-1)\ u.a$

($u.a$ signifie unité d'air)



Partie II

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)(x-1+2\ln x)$

1) montrer que $\forall x>0,\ g'(x)=f(x)$

2) en utilisant 3.c de la partie I , montrer que g est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$

3.a) que représente la fonction g pour la fonction f ? Justifier la réponse

3.b) en déduire, sans calcul, la valeur de $g(e)-g(1)$ Justifier la réponse