الثانية علوم رياضية

تصحيح الامتحان الوطني 2017

التمرين الأول : ($3{,}5$ ن)

نذكر أن $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ حلقة واحدية صفرها المصفوفة $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	
و وحدتها المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي .	
نضع $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ و لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ ، $M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b&-b\\0&0&0\\b&-a&a\end{pmatrix}$	
نعتبر المجموعة $E=\left\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$	
-1 بين أن E زمرة جزئية للزمرة $\left(M_3(\mathbb{R}),+\right)$	$0{,}5$
-2 نعرف على $M_3(\mathbb{R})$ قانون التركيب الداخلي "T" بما يلي : $\left(\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\right)\quad M(a,b)\,\mathrm{T}\,M(c,d)=M(a,b)\times A\times M(c,d)$ ، تحقق أن E جزء مستقر من $\left(M_3(\mathbb{R}),\mathrm{T}\right)$	$0{,}5$
-3 ليكن φ التطبيق من $\mathbb{C}^*$ نحو E الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم $a+ib$ (حيث: $(a,b)\in\mathbb{R}^2$) بالمصفوفة $M(a,b)$ من E	
أ) تحقق من أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو (E,T) و أن $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$ حيث : $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$	$0{,}75$
ب) استنتج أن (E^*,T) زمرة تبادلية ينبغي تحديد عنصرها المحايد J	$0{,}75$
-4 أ) بين أن قانون التركيب الداخلي "T" توزيعي بالنسبة لقانون التركيب الداخلي "+" في E	$0{,}5$
ب) استنتج أن $(E,+,\mathrm{T})$ جسم تبادلي	$0{,}5$

التمرين الثاني : ($3{,}5$ ن)

ليكن m عددا عقديا غير منعدم.

الجزء الأول :

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):\quad 2z^2-2(m+1+i)z+m^2+(1+i)m+i=0$

1- تحقق أن مميز المعادلة $\left(E\right)$ هو : $\Delta=\left(2im\right)^2$	0,5
2- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $\left(E\right)$	0,5
<u>الجزء الثاني :</u> المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$	
نفارض أن $m\in\mathbb{C}\setminus\left\{0,1,i\right\}$ و نضع : $z_1=\dfrac{1+i}{2}\left(m+1\right)$ و $z_2=\dfrac{1-i}{2}\left(m+i\right)$	
نعتبر النقط A و B و M و M_1 و M_2 التي ألحاقها على التوالي 1 و i و m و z_1 و z_2	
1- أ) تحقق أن : $z_1=iz_2+1$	0,25
ب) بين أن M_1 هي صورة M_2 بالدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللحق $\omega=\dfrac{1+i}{2}$ و قياس زاويته $\dfrac{\pi}{2}$	0,5
2- أ) تحقق من أن : $\dfrac{z_2-m}{z_1-m}=i\,\dfrac{m-1}{m-i}$	0,5
ب) بين أنه إذا كانت النقط M و M_1 و M_2 مستقيمية فإن M تنتمي إلى الدائرة $\left(\Gamma\right)$ التي أحد أقطارها $\left[AB\right]$	0,5
ج) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة . (لاحظ أن $\dfrac{z_1-\omega}{z_2-\omega}=i$)	0,75

التمرين الثالث : (3 ن)

نقبل أن 2017 عدد أولي و أن $2016=2^5 3^2 7$	
ليكن p عددا أوليا أكبر من أو يساوي 5	
1- ليكن الزوج $\left(x,y\right)$ من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ بحيث : $px+y^{p-1}=2017$	
أ) تحقق أن : $p<2017$	0,25
ب) بين أن : p لا يقسم y	0,5
ج) بين أن $y^{p-1}\equiv 1\left[p\right]$ ثم استنتج أن p يقسم 2016	0,75
د) بين أن : $p=7$	0,5
2- حدد ، حسب قيم p ، الأزواج $\left(x,y\right)$ من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ التي تحقق : $px+y^{p-1}=2017$	1

التمرين الرابع : (10 ن)

<u>الجزء الأول :</u> نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\left[0,+\infty\right[$ بما يلي :	
$f\left(0\right)=0$ و $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)\quad f\left(x\right)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$	
ليكن $\left(C\right)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (نأخذ $\left\Vert\vec{i}\right\Vert=\left\Vert\vec{j}\right\Vert=2cm$)	
1- أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0	0,25
ب) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0	0,5

ج) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$	0,5
2- أ) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها .	0,5
ب) اعط جدول تغيرات الدالة f	0,25
3- أ) بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I يتم تحديدها .	0,75
ب) أرسم المنحنى (C). (نأخذ $f(1)\simeq 0,7$ و $4e^{-3}\simeq 0,2$)	0,5
<u>الجزء الثاني :</u> نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $]0,+\infty]$ بما يلي : $F(x)=\int_x^1 f(t)dt$	
1- بين أن الدالة F متصلة على المجال $]0,+\infty]$	0,25
2- أ) باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء بين أن : $$(\forall x\in]0,+\infty[)\quad \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt=e^{-1}-xe^{-\frac{1}{x}}-\int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$$	0,5
ب) حدد $\int_x^1\left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$	0,25
ج) بين أن : $\int_0^1 f(x)dx=e^{-1}$	0,5
3- أحسب بالسنتيمتر مربع (cm^2) مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمات ذات المعادلات : $x=0$ و $x=2$ و $y=0$	0,5
4- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_n=F(n)-F(n+2)$	
أ) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد حقيقي v_n من المجال $]n,n+2[$ بحيث : $$u_n=2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{-\frac{1}{v_n}}$$	0,5
ب) بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad 2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}}\leq u_n\leq 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$	0,25
ج) استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$	0,25
<u>الجزء الثالث :</u>	
1- أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n يوجد عدد حقيقي موجب قطعا وحيد a_n بحيث : $f(a_n)=e^{-\frac{1}{n}}$	0,5
ب) بين أن المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ تزايدية	0,25
ج) تحقق أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad -\frac{1}{a_n}+\ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=-\frac{1}{n}$	0,25
2- أ) بين أن : $(\forall t\in[0,+\infty[)\quad 1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2$	0,25
ب) بين أن : $(\forall x\in[0,+\infty[)\quad -\frac{x^2}{2}\leq -x+\ln(1+x)\leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$	0,5

3- ليكن n **عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي** 4	
أ) تحقق أن $a_4 \geq 1$ **ثم استنتج أن :** $a_n \geq 1$ **(نقبل أن :** $e^{\frac{3}{4}} \geq 2$ **)**	0,5
ب) بين أن : $1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n} \leq 1$ **(يمكنك استعمال السؤالين 1-ج) و 2-ب) من الجزء الثالث)**	0,5
ج) بين أن : $\sqrt{\frac{n}{6}} \leq a_n$ **(يمكنك استعمال السؤالين 3-أ) و 3-ب)) ثم استنتج** $\lim_{n \to +\infty} a_n$	0,5
د) حدد : $\lim_{n \to +\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{n}}$	0,5

تصحيح التمرين الأول

1- لنبين أن E زمرة جزئية للزمرة $\left(M_3(\mathbb{R}),+\right)$

✓ $E \neq \varnothing$ لأن $O = M(0,0) \in E$

✓ $E \subset M_3(\mathbb{R})$

✓ ليكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ من E : $M(a,b) - M(c,d) \in E$ ؟

لدينا : $$M(a,b)-M(c,d)=\begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix}$$

إذن : $$M(a,b)-M(c,d)=\begin{pmatrix} a-c & b-d & -b+d \\ 0 & 0 & 0 \\ b-d & -a+c & a-c \end{pmatrix}$$

إذن : $$M(a,b)-M(c,d)=\begin{pmatrix} a-c & b-d & -(b-d) \\ 0 & 0 & 0 \\ b-d & -(a-c) & a-c \end{pmatrix}$$

و منه: $M(a,b)-M(c,d)=M(a-c,b-d)\in E$ ($(a-c,b-d)\in\mathbb{R}^2$)

و بالتالي : E زمرة جزئية للزمرة $\left(M_3(\mathbb{R}),+\right)$

2- لنبين أن E جزء مستقر من $\left(M_3(\mathbb{R}),\mathrm{T}\right)$

✓ لدينا : $E \subset M_3(\mathbb{R})$

✓ ليكن $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ و $M(a,b)$ و $M(c,d)$ من E

$M(a,b)\mathrm{T}M(c,d)\in E$ ؟

لدينا : $M(a,b)\mathrm{T}M(c,d)=M(a,b)\times A\times M(c,d)$

إذن : $$M(a,b)\mathrm{T}M(c,d)=\begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix}$$

إذن : $$M(a,b)\mathrm{T}M(c,d)=\begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix}$$

إذن : $$M(a,b)\top M(c,d)=\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc & -(ad+bc) \\ 0 & 0 & 0 \\ ad+bc & -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$$

و منه : $M(a,b)\top M(c,d)=M(ac-bd,ad+bc)\in E$ ($(ac-bd,ad+bc)\in\mathbb{R}^2$)

إذن $\left(\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\right)\quad M(a,b)\top M(c,d)\in E$

و بالتالي : E جزء مستقر من $\left(M_3(\mathbb{R}),\top\right)$

3- أ)

✓ لنبين أن φ تشاكل من $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ نحو $(E,\top)$

ليكن $a+ib$ و $c+id$ من $\mathbb{C}^*$ بحيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ و $(c,d)\in\mathbb{R}^2$

$\varphi\left((a+ib)\times(c+id)\right)=\varphi(a+ib)\top\varphi(c+id)$ ؟

$$\begin{aligned}\varphi\left((a+ib)\times(c+id)\right) &=\varphi\left((ac-bd)+i(ad+bc)\right)\\ &=M(ac-bd,ad+bc)\\ &=M(a,b)\top M(c,d)\\ &=\varphi(a+ib)\top\varphi(c+id)\end{aligned}$$

إذن φ تشاكل من $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ نحو $(E,\top)$

✓ لنبين أن $\varphi\left(\mathbb{C}^*\right)=E^*$

- لدينا حسب إنشاء المجموعة E :

لكل M من E^* يوجد (a,b) من $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ بحيث : $M=M(a,b)$

إذن يوجد $z=a+ib$ من $\mathbb{C}^*$ بحيث : $M=\varphi(a+ib)$

و منه : $\boxed{E^*\subset\varphi\left(\mathbb{C}^*\right)}$

- حسب إنشاء التطبيق φ لدينا : $\varphi\left(\mathbb{C}^*\right)\subset E$

$$\begin{aligned}\varphi(a+ib)=O &\Leftrightarrow M(a,b)=M(0,0)\\ &\Leftrightarrow a=b=0\end{aligned}$$

إذن : لكل z من $\mathbb{C}^*$: $\varphi(z)\neq O$

و منه : $\boxed{\varphi\left(\mathbb{C}^*\right)\subset E^*}$

ب)

- ✓ نعلم أن $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ زمرة تبادلية ($\left(\mathbb{C},+,\times\right)$ جسم تبادلي)

و لدينا φ تشاكل من $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ نحو $\left(E,\mathrm{T}\right)$

إذن $\left(\varphi\left(\mathbb{C}^*\right),\mathrm{T}\right)$ هو زمرة تبادلية

و بما أن $\varphi\left(\mathbb{C}^*\right)=E^*$ فإن $\left(E^*,\mathrm{T}\right)$ زمرة تبادلية

- ✓ نعلم أن 1 هو العنصر المحايد ل $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$

إذن $J=\varphi(1)$ هو العنصر المحايد ل $\left(\varphi\left(\mathbb{C}^*\right),\mathrm{T}\right)$ أي ل $\left(E^*,\mathrm{T}\right)$

$$J=\varphi(1)=\varphi\left((1)+i\,(0)\right)=M\,(1,0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

4- أ) لنبين أن قانون التركيب الداخلي "T" توزيعي بالنسبة لقانون التركيب الداخلي "$+$" في E

ليكن (a,b) و (c,d) و (e,f) من $\mathbb{R}^2$

$$M\,(a,b)\mathrm{T}\left(M\,(c,d)+M\,(e,f)\right)=\left(M\,(a,b)\mathrm{T}M\,(c,d)\right)+\left(M\,(a,b)\mathrm{T}M\,(e,f)\right) \text{ ؟}$$

$$\begin{aligned}M\,(a,b)\mathrm{T}\left(M\,(c,d)+M\,(e,f)\right)&=M\,(a,b)\mathrm{T}M\,(c+e,d+f)\\&=M\,\left(a(c+e)-b(d+f);a(d+f)+b(c+e)\right)\\&=M\,(ac+ae-bd-bf;ad+af+bc+be)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(M\,(a,b)\mathrm{T}M\,(c,d)\right)+\left(M\,(a,b)\mathrm{T}M\,(e,f)\right)&=M\,(ac-bd,ad+bc)+M\,(ae-bf,af+be)\\&=M\,(ac-bd+ae-bf;ad+bc+af+be)\end{aligned}$$

إذن لكل (a,b) و (c,d) و (e,f) من $\mathbb{R}^2$:

$$M\,(a,b)\mathrm{T}\left(M\,(c,d)+M\,(e,f)\right)=\left(M\,(a,b)\mathrm{T}M\,(c,d)\right)+\left(M\,(a,b)\mathrm{T}M\,(e,f)\right)$$

ب)

- ✓ لدينا $\left(E,+\right)$ زمرة تبادلية
- ✓ و لدينا $\left(E^*,\mathrm{T}\right)$ زمرة تبادلية
- ✓ و "T"توزيعي بالنسبة ل "$+$" في E

و منه $(E,+,\mathrm{T})$ جسم تبادلي

تصحيح التمرين الثاني

الجزء الأول :

-1

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(-2(m+1+i)\right)^2 - 4(2)\left(m^2+(1+i)m+i\right)\\ &= 4(m+1+i)^2 - 8\left(m^2+(1+i)m+i\right)\\ &= 4\left(m^2+2(1+i)m+(1+i)^2\right) - 8\left(m^2+(1+i)m+i\right)\\ &= 4\left(m^2+2(1+i)m+2i\right) - 8\left(m^2+(1+i)m+i\right)\\ &= -4m^2\\ &= (2im)^2\end{aligned}$$

-2 لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

لدينا : $\Delta = (2im)^2$

إذن : $z = \dfrac{2(m+1+i)+2im}{2(2)}$ أو $z = \dfrac{2(m+1+i)-2im}{2(2)}$

إذن : $z = \dfrac{m+1+i+im}{2}$ أو $z = \dfrac{m+1+i-im}{2}$

إذن : $z = \dfrac{(m+1)+i(m+1)}{2}$ أو $z = \dfrac{(m+i)-i(m+i)}{2}$

إذن : $z = (m+1)\left(\dfrac{1+i}{2}\right)$ أو $z = (m+i)\left(\dfrac{1-i}{2}\right)$

و منه : $S = \left\{\left(\dfrac{1-i}{2}\right)(m+i), \left(\dfrac{1+i}{2}\right)(m+1)\right\}$

الجزء الثاني :

1- أ)

$$\begin{aligned} iz_2+1 &= i\left(\frac{1-i}{2}(m+i)\right)+1 \\ &= \frac{1+i}{2}(m+i)+1 \\ &= \frac{1+i}{2}\left[m+i+\frac{1}{1+i}\right] \\ &= \frac{1+i}{2}[m+i+1-i] \\ &= \frac{1+i}{2}(m+1) \\ &= z_1 \end{aligned}$$

ب) لدينا :

$$\begin{aligned} z_1-\omega &= iz_2+1-\omega \\ &= iz_2+1-\frac{1+i}{2} \\ &= iz_2+\frac{1-i}{2} \\ &= i\left(z_2-\frac{1+i}{2}\right) \\ &= i\left(z_2-\omega\right) \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z_2-\omega\right) \end{aligned}$$

إذن : M_1 هي صورة M_2 بالدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللحق $\omega=\frac{1+i}{2}$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$

2- أ)

$$\frac{z_2-\omega}{z_1-\omega}=\frac{\left(\frac{1-i}{2}\right)(m+i)-m}{\left(\frac{1+i}{2}\right)(m+1)-m}$$

$$=\frac{(1-i)(m+i)-2m}{(1+i)(m+1)-2m}$$

$$=\frac{m+i-im+1-2m}{m+1+im+i-2m}$$

$$=\frac{1-m+i(1-m)}{1-m+im+i}$$

$$=\frac{i(m-1)(i-1)}{(m-i)(i-1)}$$

$$=\frac{i(m-1)}{m-i}$$

ب) نفترض أن M و M_1 و M_2 مستقيمية

إذن : $\frac{z_2-m}{z_1-m}\in\mathbb{R}$

إذن : $i\,\frac{m-1}{m-i}\in\mathbb{R}$

إذن : $\frac{m-1}{m-i}\in i\mathbb{R}$

إذن : $\arg\left(\frac{m-1}{m-i}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

إذن : $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

إذن : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

و منه : M تنتمي إلى الدائرة (Γ) التي أحد أقطارها $[AB]$

ج) نفترض أن Ω و M و M_1 و M_2 متداورة

إذن $\frac{z_1-\omega}{z_2-\omega}\times\frac{z_2-m}{z_1-m}\in\mathbb{R}$

لدينا : $\frac{z_2-m}{z_1-m}=i\,\frac{m-1}{m-i}$ و $\frac{z_1-\omega}{z_2-\omega}=i$

إذن : $i \times i \dfrac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$

إذن : $-\dfrac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$

إذن : $\dfrac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$

إذن : M و A و B مستقيمية

إذن $M \in (AB)$ بحيث : $M \neq A$ و $M \neq B$

(عكسيا نبين أن إذا كان $M \in (AB)$ بحيث : $M \neq A$ و $M \neq B$ فإن Ω و M و M_1 و M_2 متداورة)

و بالتالي مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ωو M و M_1 و M_2 متداورة هي المستقيم (AB) محروما من النقطتين A و B

تصحيح التمرين الثالث

1- أ) ليكن p عددا أوليا أكبر من أو يساوي 5

نفترض أن $p \geq 2017$

لدينا الزوج (x, y) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ إذن : $x \geq 1$ و $y \geq 1$

إذن $px \geq 2017$ و $y^{p-1} \geq 1$

إذن $px + y^{p-1} \geq 2018$

إذن $2017 \geq 2018$ و هذا غير ممكن

و منه : $p < 2017$

ب) نفترض أن p يقسم y

إذن p يقسم y^{p-1}

إذن $(k \in \mathbb{N}^*)$ $y^{p-1} = kp$

و لدينا : $px + y^{p-1} = 2017$

إذن $px + kp = 2017$

إذن $p(x+k) = 2017$

إذن p يقسم 2017

و بما أن p عدد أولي أكبر من أو يساوي 5 فإن $p = 2017$

و هذا تناقض مع كون $p < 2017$

و منه p لا يقسم y

ج)

- ✓ لدينا p عدد أولي و p لا يقسم y
  إذن حسب مبرهنة فيرما : $y^{p-1} \equiv 1[p]$
- ✓ لدينا : $px \equiv 0[p]$ و $y^{p-1} \equiv 1[p]$
  إذن $px + y^{p-1} \equiv 1[p]$
  إذن $2017 \equiv 1[p]$
  إذن $2016 \equiv 0[p]$
  و منه p يقسم 2016

د) لدينا p يقسم 2016
إذن p يقسم $2^5 \times 3 \times 7$
إذن $p = 2$ أو $p = 3$ أو $p = 7$ (p عدد أولي)
و بما أن $p \geq 5$

-2

- ✓ إذا اكن $p \neq 7$: فحسب السؤال 1–) المعادلة لا تقبل حلا
- ✓ إذا كان $p = 7$:
  المعادلة تصبح : $7x + y^6 = 2017$
  بما أن $x \geq 1$ فإن $y^6 < 2017$
  إذن $y < 4$
  إذن $y \in \{1,2,3\}$ ($y \in \mathbb{N}^*$)
- إذا كان $y = 3$: المعادلة تصبح : $7x + 3^6 = 2017$
  إذن $7x = 1288$
  إذن $x = 184$
- إذا كان $y = 2$: المعادلة تصبح : $7x + 2^6 = 2017$
  إذن $7x = 1953$
  إذن $x = 279$
- إذا كان $y = 1$: المعادلة تصبح : $7x + 1 = 2017$
  إذن $7x = 2016$
  إذن $x = 288$

و بالتالي : $(x, y) \in \{(184,3);(279,2);(288,1)\}$

تصحيح التمرين الرابع

الجزء الأول :

1- أ) لنبين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0

✓ لدينا : $f(0)=0$

✓

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{t\to -\infty} (1-t)e^{t}$$

$$\left(\begin{array}{l} t=\dfrac{-1}{x} \\ x\to 0^{+} \\ t\to -\infty \end{array}\right) \qquad = \lim_{t\to -\infty} e^{t} - te^{t}$$

$$=0$$

بما أن $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0)$ فإن الدالة f متصلة على اليمين في 0

ب) لنبين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2}}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\left(\begin{array}{l} t=\dfrac{-1}{x} \\ x\to 0^{+} \\ t\to -\infty \end{array}\right) \qquad = \lim_{t\to -\infty} \left(-t+t^{2}\right)e^{t}$$

$$= \lim_{t\to -\infty} -te^{t} + t^{2}e^{t} = 0$$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و لدينا : $f_d'(0)=0$

ج)

✓

- $f_1 : x \mapsto 1+\frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$
- $f_2 : x \mapsto -\frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

$f_2 : x \mapsto e^{x}$قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f_2\left(]0,+\infty[\right) \subset \mathbb{R}$

إذن $f_4 = f_3 \circ f_2 : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و بالتالي الدالة $f = f_1 \times f_4$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

✓ ليكن $x \in]0,+\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}\right)' \\ &= \left(1+\frac{1}{x}\right)' e^{-\frac{1}{x}} + \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' \\ &= \frac{-1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} + \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x}\right)' e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{-1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} + \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\left(-1+1+\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

إذن $f'(x) = \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} \quad \left(\forall x \in]0,+\infty[\right)$

2- أ) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} = 1$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-1}{x}}=\lim\limits_{t\to 0} e^{t}=1 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{c} t=-\dfrac{1}{x} \\ x\to+\infty \\ t\to 0 \end{array}\right)$

<u>التأويل الهندسي :</u> (C) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=1$ بجوار $+\infty$

ب) جدول تغيرات f :

x	$0 \quad +\infty$
$f'(x)$	$0 \quad +$
$f(x)$	$0 \nearrow 1$

3- أ) لدينا $f'(x)=\dfrac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$ $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)$

الدالة f' قابلة للاشتقاق على $\left]0,+\infty\right[$

ليكن $x\in\left]0,+\infty\right[$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}\right)' \\ &= \left(\frac{1}{x^3}\right)' e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^3}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' \\ &= \frac{-\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^3}\left(-\frac{1}{x}\right)' e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{-3x^2}{x^6}e^{\frac{-1}{x}}+\frac{1}{x^3}\times\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{-3}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^5}e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x^5}e^{\frac{-1}{x}}\left(-3x+1\right) \end{aligned}$$

لدينا : $\dfrac{1}{x^5}e^{\frac{-1}{x}}>0$ إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $-3x+1$

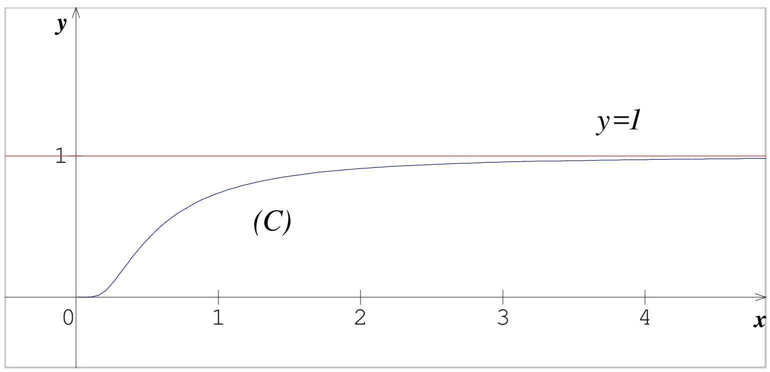
$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

على المجال $\left]0,\frac{1}{3}\right[$: $f''(x)>0$

على المجال $\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$: $f''(x)<0$

بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند $\frac{1}{3}$ فإن النقطة $I\left(\frac{1}{3},4e^{-3}\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C)

ج)



<u>الجزء الثاني :</u>

1- ليكن $x\in[0,+\infty[$:

لدينا f متصلة على $[0,+\infty[$ ($1\in[0,+\infty[$ و $x\in[0,+\infty[$)

$x\mapsto x$ و $x\mapsto 1$ قابلتين للاشتقاق على $[0,+\infty[$

إذن F متصلة على $[0,+\infty[$

ملاحظة : ($F:x\mapsto \int_x^1 f(t)dt=-\int_1^x f(t)dt$)

2- أ) ليكن $x\in]0,+\infty[$:

$$\begin{cases} u(t)=e^{\frac{-1}{t}} \\ v'(t)=1 \end{cases} \quad \searrow \quad \begin{cases} u'(t)=\frac{1}{t^2}e^{\frac{-1}{t}} \\ v(t)=t \end{cases} \updownarrow$$

$$\int_x^1 e^{\frac{-1}{t}}dt = \left[te^{\frac{-1}{t}}\right]_x^1-\int_x^1\frac{1}{t}e^{\frac{-1}{t}}dt$$

$$=e^{-1}-xe^{\frac{-1}{x}}-\int_x^1\frac{1}{t}e^{\frac{-1}{t}}dt$$

إذن : $\left(\forall x\in \left]0,+\infty\right[\right)\quad \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$

ب) ليكن $x\in \left]0,+\infty\right[$:

$$\begin{aligned}\int_x^1\left(1+\frac{1}{t}\right)e^{\frac{-1}{t}}dt &= \int_x^1 e^{\frac{-1}{t}}dt + \int_x^1\frac{1}{t}e^{\frac{-1}{t}}dt\\ &= e^{-1} - xe^{\frac{-1}{x}} - \int_x^1\frac{1}{t}e^{\frac{-1}{t}}dt + \int_x^1\frac{1}{t}e^{\frac{-1}{t}}dt\\ &= e^{-1} - xe^{\frac{-1}{x}}\end{aligned}$$

إذن : $\left(\forall x\in \left]0,+\infty\right[\right)\quad \int_x^1\left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}}$

ج) لدينا : $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1\left(1+\frac{1}{t}\right)e^{\frac{-1}{t}}dt = F(0)$

و بما أن F متصلة على اليمين في 0 فإن $F(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}F(x)$

إذن : $F(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{-1} - xe^{\frac{-1}{x}} = \lim\limits_{t\to -\infty} e^{-1} + \frac{1}{t}e^{t} = e^{-1}$

و منه : $\int_0^1 f(x)dx = e^{-1}$

3- مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمات ذات المعادلات $x=0$: و $x=2$ و $y=0$:

$$A=\int_0^2 |f(t)|dt\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$$

لدينا : $(\forall x\,[0,2])\quad f(x)\geq 0$

إذن : $A=\int_0^2 f(t)dt\times 2cm\times 2cm$

إذن : $A=\left(\int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt\right)\times 4cm^2$

إذن : $A=\left(e^{-1} - \int_2^1 f(t)dt\right)\times 4cm^2$

إذن : $A=\left(e^{-1} - \left(e^{-1} - 2e^{\frac{-1}{2}}\right)\right)\times 4cm^2$

و منه : $A=8e^{\frac{-1}{2}}cm^2$

4- أ) ليكن $n \in \mathbb{N}$:

✓ F متصلة على المجال $[n,n+2]$

✓ F قابلة للاشتقاق على المجال $]n,n+2[$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : يوجد v_n من المجال $]n,n+2[$ بحيث :

$$F(n)-F(n+2)=F'(v_n).(n-n-2)$$

إذن : $F(n)-F(n+2)=-2F'(v_n)$

($F'(x)=\left(\int_x^1 f(t)dt\right)'=-\left(\int_1^x f(t)dt\right)'=-f(x)=-\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}}$)

إذن لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد حقيقي v_n من المجال $]n,n+2[$ بحيث : $u_n=2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{-\frac{1}{v_n}}$

ب) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$:

لدينا : $n \le v_n \le n+2$ و الدالة f تزليدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$

إذن : $f(n)\le f(v_n)\le f(n+2)$

إذن : $\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{n}} \le \left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{\frac{-1}{v_n}} \le \left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{\frac{-1}{n+2}}$

و منه : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad 2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}} \le u_n \le 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$

ج) لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad 2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}} \le u_n \le 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$

و لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}}=2$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}=2$

إذن حسب مبرهنة الدرك : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$

الجزء الثالث :

1- أ) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$:

لنبين أن المعادلة $f(x)=e^{\frac{-1}{n}}$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0,+\infty[$

✓ لدينا f متصلة على $]0,+\infty[$

✓ و لدينا f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

✓ $e^{\frac{-1}{n}} \in f(]0,+\infty[)=]0,1[$

و منه لكل n من $\mathbb{N}^*$ المعادلة $f(x)=e^{\frac{-1}{n}}$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0,+\infty[$

و بالتالي : لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n يوجد عدد حقيقي موجب قطعا وحيد a_n بحيث : $f(a_n)=e^{-\frac{1}{n}}$

ب) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$:

لدينا : $f(a_n)=e^{-\frac{1}{n}}$ و $f(a_{n+1})=e^{-\frac{1}{n+1}}$

و $f(a_{n+1})-f(a_n)=e^{-\frac{1}{n+1}}-e^{\frac{-1}{n}}=e^{\frac{-1}{n}}\left(e^{-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}}-1\right)=e^{\frac{-1}{n}}\left(e^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)>0$

إذن : $f(a_{n+1})>f(a_n)$

و بما أن f تقابل تزايدي فإن f^{-1} أيضا تقابل تزايدي

إذن $f^{-1}(f(a_{n+1}))>f^{-1}(f(a_n))$

و منه لكل n من $\mathbb{N}^*$: $a_{n+1}>a_n$

و بالتالي : $(a_n)_{n\geq 1}$ تزايدية

ج) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$:

لدينا :

$$f(a_n)=e^{\frac{-1}{n}} \qquad \Leftrightarrow \ln(f(a_n))=\frac{-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\times e^{\frac{-1}{a_n}}\right)=\frac{-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right)+\ln\left(e^{\frac{-1}{a_n}}\right)=\frac{-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right)-\frac{1}{a_n}=\frac{-1}{n}$$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \quad -\frac{1}{a_n}+\ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=-\frac{1}{n}$

2- أ) ليكن $t\in[0,+\infty[$:

لدينا : $1-t-\frac{1}{1+t}=\frac{-t^2}{1+t}\leq 0$

إذن : $\boxed{1-t\leq\frac{1}{1+t}}$

و لدينا : $\frac{1}{1+t}-\left(1-t+t^2\right)=\frac{1-1+t-t^2-t+t^2-t^3}{1+t}=\frac{-t^3}{1+t}\leq 0$

إذن : $\boxed{\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2}$

و بالتالي : $\left(\forall t\in[0,+\infty[\right)\quad 1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2$

ب) ليكن $x\in[0,+\infty[$:

لدينا : $\left(\forall t\in[0,+\infty[\right)\quad 1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2$

إذن : $\int_0^x(1-t)\,dt\leq\int_0^x\frac{1}{1+t}dt\leq\int_0^x\left(1-t+t^2\right)dt$

إذن : $\left[t-\frac{t^2}{2}\right]\leq\left[\ln(1+t)\right]_0^x\leq\left[t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\right]_0^x$

إذن : $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

و بالتالي : $\left(\forall x\in[0,+\infty[\right)\quad -\frac{x^2}{2}\leq -x+\ln(1+x)\leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

3- أ)

✓ لدينا : $f(1)=2e^{\frac{-1}{2}}$ و $f(a_4)=e^{\frac{-1}{4}}$

و $f(a_4)-f(1)=e^{\frac{-1}{4}}-2e^{\frac{-1}{2}}=e^{\frac{-1}{2}}\left(e^{\frac{3}{4}}-2\right)\geq 0$

إذن : $f(a_4)\geq f(1)$

و بما أن f تقابل تزايدي فإن f^{-1} أيضا تقابل تزايدي

إذن : $f^{-1}\left(f(a_4)\right)\geq f^{-1}\left(f(1)\right)$

و منه : $a_4\geq 1$

✓

- من أجل $n=4$:

  لدينا : $a_4\geq 1$

- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 4
  - نفترض أن $a_n\geq 1$
  - و نبين أن $a_{n+1}\geq 1$

لدينا : $(a_n)_{n\geq 1}$ تزايدية إذن $\boxed{a_{n+1}\geq a_n}(1)$

و حسب الافتراض لدينا : $\boxed{a_n\geq 1}(2)$

من (1) و (2) نستنتج أن $a_{n+1}\geq 1$

- نستنتج أن لكل n من $\mathbb{N}^*\setminus\{1,2,3\}$: $a_n\geq 1$

ب) لدينا حسب نتيجة السؤال 2-ب) من الجزء الثالث : $-\dfrac{x^2}{2}\leq -x+\ln(1+x)\leq -\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3} \quad (\forall x\in[0,+\infty[)$

نأخذ $x=\dfrac{1}{a_n}$:

إذن : $-\dfrac{1}{2a_n^2}\leq -\dfrac{1}{a_n}+\ln\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)\leq -\dfrac{1}{2a_n^2}+\dfrac{1}{3a_n^3}$

و لدينا حسب نتيجة السؤال 1-ج) من الجزء الثالث : $-\dfrac{1}{a_n}+\ln\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)=-\dfrac{1}{n} \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$

إذن : $-\dfrac{1}{2a_n^2}\leq -\dfrac{1}{n}\leq -\dfrac{1}{2a_n^2}+\dfrac{1}{3a_n^3}$

إذن : $-\dfrac{1}{2}\leq -\dfrac{a_n^2}{n}\leq -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3a_n}$

إذن : $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3a_n}\leq \dfrac{a_n^2}{n}\leq \dfrac{1}{2}$

و منه : $1-\dfrac{2}{3a_n}\leq \dfrac{2a_n^2}{n}\leq 1$

ج)

- ✓ لدينا : $a_n\geq 1$

إذن $3a_n\geq 3$

إذن : $\dfrac{2}{3a_n}\leq \dfrac{2}{3}$

إذن : $-\dfrac{2}{3a_n}\geq -\dfrac{2}{3}$

إذن : $\dfrac{1}{3}\leq 1-\dfrac{2}{3a_n}$

و بما أن $1-\dfrac{2}{3a_n}\leq\dfrac{2a_n^2}{n}$

فإن : $\dfrac{1}{3}\leq\dfrac{2a_n^2}{n}$

إذن : $\dfrac{n}{6}\leq a_n^2$

و منه : $\sqrt{\dfrac{n}{6}}\leq a_n$

✓ لدينا : $\sqrt{\dfrac{n}{6}}\leq a_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{n}{6}}=+\infty$ إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$

د) لدينا : $1-\dfrac{2}{3a_n}\leq\dfrac{2a_n^2}{n}\leq 1$

إذن : $\boxed{\sqrt{1-\dfrac{2}{3a_n}}\leq a_n\sqrt{\dfrac{2}{n}}\leq 1}$ ($1-\dfrac{2}{3a_n}\geq 0$)

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{a_n}=0$ و منه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{2}{3a_n}}=\sqrt{1}=1}$

و التالي حسب مبرهنة الدرك : $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\sqrt{\dfrac{2}{n}}=1$

つづく