الامتحان الوطني الموحد

لنيل شهادة البكالوريا

الدورة العادية 2012

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والإمتحانات

مادة الرياضيات

العلوم التجريبية بمسالكها

العلوم التكنولوجية بمسلكيها

مدة الانجاز 3h - المعامل 7

التمرين الأول : (3 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(1,1,-1)$ و $B(0,1,-2)$ و $C(3,2,1)$ و الفلكة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$

0,50 ن	1	بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,0,1)$ و أن شعاعها يساوي $\sqrt{3}$.
0,75 ن	2 أ	بين أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ و تحقق من أن : $x-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)
1,00 ن	2 ب	تحقق من أن : $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{2}$ ثم بين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها 1 .
	3	ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω العمودي على المستوى (ABC) .
0,25 ن	3 أ	بين أن : $\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases} \; ; \; (t\in\mathbb{R})$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .
0,25 ن	3 ب	بين أن مثلوث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) هو $(2,0,0)$.
0,25 ن	3 ج	استنتج مركز الدائرة (Γ) .

التمرين الثاني : (3 ن)

0,75 ن	1	حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-12z+61=0$
	2	نعتبر المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي : a و b و c بحيث : $a=6-5i$ و $b=4-2i$ و $c=2+i$.
0,50 ن	2 أ	أحسب $\frac{a-c}{b-c}$ و استنتج أن النقط A و B و C مستقيمية .
		نعتبر الإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ حيث لحق $\vec{u}$ هو $(1+5i)$
0,50 ن	2 ب	تحقق أن لحق النقطة D صورة النقطة C بالإزاحة T هو $d=3+6$.
0,75 ن	2 ج	بين أن : $\frac{d-c}{b-c}=-1+i$ و أن : $\frac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي $-1+i$
0,50 ن	2 د	استنتج قياسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})$.

التمرين الثالث : (3 ن)

يحتوي كيس على ثماني بيدقات : بيدقة واحدة تحمل العدد 0 و خمس بيدقات تحمل العدد 1 و بيدقتان تحملان العدد 2 (لا يمكن التمييز بينها باللمس) .

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث بيدقات من الكيس و نعتبر الأحداث التالية :

A: " الحصول على ثلاث بيدقات تحمل أعدادا مختلفة مثنى مثنى " .

B: " مجموع الأعداد التي تحملها البيدقات المسحوبة يساوي 5 "

C: " مجموع الأعداد التي تحملها البيدقات المسحوبة يساوي 4 " .

0,00 3 ن — بين أن : $p(A)=\frac{5}{28}$ و $p(B)=\frac{5}{56}$ و $p(C)=\frac{3}{8}$

التمرين الرابع : (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11} \ ; \ (\forall n\epsilon\mathbb{N}) \\ u_0 = 11 \end{cases}$$

0,25 ن	1		تحقق من أن : $u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12) \ ; \ (\forall n\epsilon\mathbb{N})$
0,50 ن	2	أ	بين بالترجع أن : $u_n < 12 \ ; \ (\forall n\epsilon\mathbb{N})$
0,50 ن	2	ب	بين أن المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ تزايدية قطعا .
0,25 ن	2	ج	استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متقاربة.
	3		لتكن $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المتتالية العددية بحيث : $v_n = u_n - 12 \ ; \ (\forall n\epsilon\mathbb{N})$.
0,75 ن	3	أ	بين أن المتتالية $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{10}{11}$ ثم أكتب v_n بدلالة n .
0,75 ن	3	ب	بين أن : $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n \ ; \ (\forall n\epsilon\mathbb{N})$ ثم أحسب النهاية $\lim\limits_{n\infty} u_n$

التمرين الخامس : (8 ن)

	I		لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2\ln x$
0,75 ن	I	1	بين أن : (x^2-1) و $2x^2\ln x$ لهما نفس الإشارة على $]0;1[$. ثم استنتج أن : $\forall\ x\ \epsilon\ ]0;1] \ ; \ g(x) \leq 0$
0,75 ن	I	2	بين أن (x^2-1) و $2x^2\ln x$ لهما نفس الإشارة على $]1;+\infty[$ ثم استنتج أن : $\forall\ x\ \epsilon\ [1;+\infty[\ ; \ g(x) \geq 0$
	II		نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = (x^2-1)\ln x$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (الوحدة $3\ cm^2$)

0,50 ن	II	1	أ	بين أن : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ و أوِّل النتيجة هندسيا .
1,00 ن	II	1	ب	أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ و استنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه .
1,25 ن	II	2	أ	بين أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x} \ ; \ \forall\ x\ \epsilon\ ]0;+\infty[$ (و أوِّل هندسيا النتيجة $f'(1) = 0$).
0,50 ن	II	2	ب	استنتج أن الدالة f تناقصية على المجال $]0;1]$ و تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.
0,50 ن	II	2	ج	إعط جدول تغيرات الدالة f على $]0;+\infty[$ ثم بين أن : $f(x) \geq 0 \ ; \ \forall\ x\ \epsilon\ ]0;+\infty[$.
1,00 ن	II	3		أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$ في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
0,50 ن	II	4	أ	بين أن : $u : x \to \frac{x^3}{3} - x$ دالة أصلية للدالة $v : x \to x^2 - 1$ على $\mathbb{R}$.
1,00 ن	II	4	ب	باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن : $\int_1^2 (x^2-1)\ln x\,dx = \frac{2}{9}(1 + 3\ln 2)$
0,25 ن	II	4	ج	أحسب بـ cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$.

المملكة المغربية — وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي

شعبة العلوم التجريبية بمسالكها و شعبة العلوم والتكنولوجيا بمسلكيها

المركز الوطني للتقويم والامتحانات — مادة الرياضيات — مدة الانجاز : 3 ساعات — المعامل: 7

التمرين الأول: (3 ن)

1) لنبين أن مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(1,0,1)$ و أن شعاعها $r=\sqrt{3}$: **0,25 + 0,25**

لدينا $x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$ معادلة ديكارتية للفلكة (S)

ومنه $(S): x^2-2x+y^2+z^2-2z-1=0$ إذن $(S):(x-1)^2-1+(y-0)^2+(z-1)^2-1-1=0$

أي $(S):(x-1)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=3$ إذن $(S):(x-1)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$

المعادلة المختصرة للفلكة (S) و بالتالي مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(1,0,1)$ و شعاعها يساوي $r=\sqrt{3}$

2) أ- ≺ لنبين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$ **0,5**

لدينا: $A(1,1,-1)$; $B(0,1,-2)$; $C(3,2,1)$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$ ومنه: $\overrightarrow{AB}(0-1, 1-1, -2+1)$ إذن: $\overrightarrow{AB}(-1,0,-1)$

و $\overrightarrow{AC}(x_C-x_A, y_C-y_A, z_C-z_A)$ ومنه: $\overrightarrow{AC}(3-1, 2-1, 1+1)$ إذن: $\overrightarrow{AC}(2,1,2)$

إذن: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

أي: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=(0+1)\vec{i}-(-2+2)\vec{j}+(-1-0)\vec{k}$

و بالتالي: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$

≺ لنستنتج أن $x-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC): **0,25**

طريقة1: لدينا $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,0,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

إذن: $(ABC): 1x+0y-1z+d=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

و بما أن $A\in(ABC)$ فإن مثلوث إحداثياتها يحقق المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC).

$A(1,1,-1)\in(ABC)\Leftrightarrow 1-(-1)+d=0$ إذن $2+d=0$ أي $d=-2$

وبالتالي $x-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

طريقة2: لدينا $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,0,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

إذن: $M(x,y,z)\in(ABC):\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\\ z+1\end{pmatrix}=0$

$M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow 1(x-1)+0(y-1)-1(z+1)=0\Leftrightarrow x-1-z-1=0$

و بالتالي: $x-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

ب–لنتحقق من أن $d\left(\Omega,(\text{ABC})\right)=\sqrt{2}$ ثم لنبين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها $r=1$:

لدينا $x-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) و $\Omega(1,0,1)$

إذن $d\left(\Omega,(\text{ABC})\right)=\dfrac{|ax_{\Omega}+by_{\Omega}+cz_{\Omega}+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ومنه $d\left(\Omega,(\text{ABC})\right)=\dfrac{|1\times1+0-1\times1-2|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\dfrac{|1+0-1-2|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

إذن $d\left(\Omega,(\text{ABC})\right)=\sqrt{2}$ و $r=\sqrt{3}$ وبما أن $d\left(\Omega,(\text{ABC})\right)<r$ فإن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها $1=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\text{R}=\sqrt{d^2-r^2}$. 0,25+ 0,25+ 0,5

3) أ– لنبين أن $\begin{cases}x=1+t\\ y=0\\ z=1-t\end{cases}\ ;\ (t\in\mathbb{R})$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على المستوى (ABC):

بما أن المستقيم (Δ) عمودي على المستوى (ABC) فإن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$ المتجهة المنظمية على (ABC) هي متجهة موجهة للمستقيم (Δ) و $\Omega\in(\Delta)$

إذن $M(x,y,z)\in(\Delta)$ تكافئ أن $\exists t\in\mathbb{R}/\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix}x-1\\ y-0\\ z-1\end{pmatrix}=t\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ و $M\in(\Delta)\Leftrightarrow$ بالتالي: $\begin{cases}x-1=t\\ y-0=0\\ z-1=-t\end{cases}$

إذن $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=1+t\\ y=0\\ z=1-t\end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ). 0,25

ب– لنبين أن مثلوث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) هو $(2;0;0)$: 0,25

لنحل تحليليا النظمة: $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=1+t\\ y=0\\ z=1-t\\ x-z-2=0\end{cases}$ ومنه $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=1+t\\ y=0\\ z=1-t\\ 1+t-1+t-2=0\end{cases}$

يعني $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=1+t\\ y=0\\ z=1-t\\ 2t-2=0\end{cases}$ يعني $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=1+t\\ y=0\\ z=1-t\\ 2t=2\end{cases}$ يعني $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=1+t\\ y=0\\ z=1-t\\ t=1\end{cases}$ إذن $\begin{cases}x=1+1=2\\ y=0\\ z=1-1=0\\ t=1\end{cases}$

و بالتالي مثلوث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) هو $(2;0;0)$.

ج– لنستنتج مركز الدائرة (Γ) : 0,25

☆ $H(2;0;0)$ نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) هي المسقط العمودي للنقطة Ω مركز الفلكة (S)

و بما أن الفلكة (S) تقطع المستوى (ABC) وفق دائرة فإن $H(2;0;0)$ هي مركز الدائرة (Γ) .

التمرين الثاني: (3 ن)

1) لنحل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد العقدية المعادلة: $z^2-12z+61=0$

لدينا: $a=1\,;\,b=-12\,;\,c=61$ و $\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4\times1\times61=144-244=-100$ 0,25

بما أن $\Delta\neq0$ فإن المعادلة تقبل حلين مترافقين

$z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{12+10i}{2\times1}=\dfrac{2(6+5i)}{2}$ و $z_2=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{12-10i}{2\times1}=\dfrac{2(6-5i)}{2}$

و بالتالي: $z_1=6+5i$ و $z_2=6-5i$ إذن: $S=\{6+5i\,,\,6-5i\}$ 0,25 + 0,25

2) أ– لنحسب $\dfrac{a-c}{b-c}$ و لنستنتج أن النقط A و B و C مستقيمية: 0,25 + 0,25

لدينا $\dfrac{a-c}{b-c}=\dfrac{6-5i-2-i}{4-2i-2-i}=\dfrac{4-6i}{2-3i}=\dfrac{2(2-3i)}{2-3i}=2$ و بما أن $\dfrac{a-c}{b-c}\in\mathbb{R}$ فإن النقط A و B و C مستقيمية.

ب– لنتحقق من أن لحق النقطة D صورة النقطة C بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}(1+5i)$ هو $d=3+6i$:

لدينا $T(C)=D\Leftrightarrow\overrightarrow{CD}=\vec{u}\Leftrightarrow d-c=1+5i\Leftrightarrow d=1+5i+c=1+5i+2+i=3+6i$

و بالتالي لحق النقطة D صورة النقطة C بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}(1+5i)$ هو $d=3+6i$. 0,25 + 0,25

ج– ≺ لنبين أن: $\dfrac{d-c}{b-c}=-1+i$ 0,5

طريقة1: $\dfrac{d-c}{b-c}=\dfrac{3+6i-2-i}{4-2i-2-i}=\dfrac{1+5i}{2-3i}=\dfrac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\dfrac{2+3i+10i-15}{2^2+3^2}=\dfrac{-13+13i}{13}=\dfrac{13(-1+i)}{13}$

و منه $\dfrac{d-c}{b-c}=-1+i$

طريقة2: $\dfrac{d-c}{b-c}=\dfrac{3+6i-2-i}{4-2i-2-i}=\dfrac{1+5i}{2-3i}=\dfrac{(1+5i)(-1+i)}{(2-3i)(-1+i)}=\dfrac{(1+5i)(-1+i)}{-2+2i+3i+3}=\dfrac{(1+5i)(-1+i)}{1+5i}=-1+i$

≺ لنبين أن $\dfrac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي $-1+i$: 0,25

☆ لدينا $\dfrac{d-c}{b-c}=-1+i$ ومنه $\left|\dfrac{d-c}{b-c}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

و $\cos(\arg(-1+i))=\dfrac{\mathrm{Re}(-1+i)}{|-1+i|}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin(\arg(-1+i))=\dfrac{\mathrm{Im}(-1+i)}{|-1+i|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

إذن $\arg(-1+i)=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$ و بالتالي $\dfrac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي $-1+i$.

د– لنستنتج قياسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})$: 0,25 + 0,25

$(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})=\arg\left(\dfrac{d-c}{b-c}\right)=\arg(-1+i)$ و بالتالي $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})=\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$

التمرين الثالث: (3 ن)

نسحب عشوائيا تآنيا ثلاث بيدقات من كيس يضم ثمان بيدقات

❷❷ ❶❶❶❶❶ ⓿

1) لنبين أن $p(A)=\frac{5}{28}$:

A : " نحصل على ثلاث بيدقات تحمل أرقاما مختلفة مثنى مثنى " : $\{0;1;2\}$

$p(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{C_1^1\times C_5^1\times C_2^1}{C_8^3}=\frac{1\times5\times2}{56}=\frac{10}{56}$ و بالتالي $p(A)=\frac{5}{28}$ 0,5 + 0,5

2) لنبين أن $p(B)=\frac{5}{56}$:

B : " نحصل على ثلاث بيدقات تحمل أرقاما مجموعها يساوي5 " : $\{1;2;2\}$

$p(B)=\frac{card(B)}{card(\Omega)}=\frac{C_5^1\times C_2^2}{C_8^3}=\frac{5\times1}{56}$ و بالتالي $p(B)=\frac{5}{56}$ 0,5 + 0,5

3) لنبين أن $p(C)=\frac{3}{8}$:

C : " نحصل على ثلاث بيدقات تحمل أرقاما مجموعها يساوي4 " : $\{1;1;2\}$ أو $\{0;2;2\}$

$p(C)=\frac{card(C)}{card(\Omega)}=\frac{C_1^1\times C_2^2+C_5^2\times C_2^1}{C_8^3}=\frac{1+10\times2}{56}=\frac{21}{56}$ و بالتالي $p(C)=\frac{3}{8}$ 0,5 + 0,5

التمرين الرابع: (3 ن)

1) لنتحقق من أن: $u_{n+1}-12=\frac{10}{11}(u_n-12)$ لكل n من $\mathbb{N}$ 0,25

لدينا $u_{n+1}-12=\frac{10}{11}u_n+\frac{12}{11}-12=\frac{10u_n+12-132}{11}=\frac{10u_n-120}{11}$ وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N};u_{n+1}-12=\frac{10}{11}(u_n-12)$

2) أ− لنبين بالترجع أن: $u_n<12$ لكل n من $\mathbb{N}$ 0,5

☆ لنتحقق من أن $u_0<12$: لدينا $u_0=11$ و $11<12$ إذن $u_0<12$ ❶

☆ نفترض أن $u_n<12$ و نبين أن $u_{n+1}<12$:

لدينا حسب فرضية الترجع $u_n<12$ ومنه $u_n-12<0$ و $\frac{10}{11}>0$ إذن $\frac{10}{11}(u_n-12)<0$

أي $u_{n+1}<12$ لكل n من $\mathbb{N}$ ❷ من ❶ و ❷ نستنتج أن $u_n<12$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب− لنبين أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا n: 0,5

لدينا $u_{n+1}-u_n=\frac{10}{11}u_n+\frac{12}{11}-u_n=\frac{10u_n+12-11u_n}{11}=\frac{1}{11}(12-u_n)$

لدينا $u_n<12$ لكل n من $\mathbb{N}$ومنه $0<12-u_n$ و $11>0$ إذن لكل n من $\mathbb{N}$: $\frac{1}{11}(12-u_n)>0$

أي $u_{n+1}-u_n>0$ لكل n من $\mathbb{N}$ و بالتالي (u_n) تزايدية قطعا n.

ج− لنستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة : 0,25

لدينا مما سبق أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا n ومكبورة بالعدد 12 إذن المتتالية (u_n) متقاربة .

3) أ− ✍ لنبين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{10}{11}$: 0,25

لدينا $v_{n+1}=u_{n+1}-12=\frac{10}{11}(u_n-12)$ و $v_n=u_n-12$ إذن $v_{n+1}=\frac{10}{11}v_n$ وبالتالي المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{10}{11}$.

✍ لنكتب v_n بدلالة n:

لدينا $v_0=u_0-12=11-12=-1$ 0,25 و $v_n=v_0\times q^n=-1\times\left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$. 0,25

ب− ☆ لنبين أن $u_n=12-\left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$: 0,25

لدينا $v_n=u_n-12$ و منه $u_n=v_n+12$ و $v_n=-\left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

إذن $u_n=12-\left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

☆ لنحسب نهاية المتتالية (u_n):

لدينا $u_n=12-\left(\frac{10}{11}\right)^n$ و $-1<\frac{10}{11}<1$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{10}{11}\right)^n=0$ 0,25 إذن $\lim_{n\to+\infty}u_n=12$ 0,25

التمرين الخامس: (8 ن)

I-1) ✍ لنبين أن: x^2-1 و $2x^2\ell n(x)$ لهما نفس الإشارة على المجال $]0;1[$:   0,25 + 0,25

لدينا $0<x<1$ و منه $0<x^2<1$ إذن $-1<x^2-1<0$ و بالتالي إشارة x^2-1 سالبة على المجال $]0;1[$. ❶

وإشارة $2x^2\ell n(x)$ هي إشارة $\ell n(x)$ لأن لكل x من $]0;1[$: $2x^2>0$ و $\ell n(x)<0$ على المجال $]0;1[$

و بالتالي إشارة $2x^2\ell n(x)$ سالبة على المجال $]0;1[$.❷

إذن x^2-1 و $2x^2\ell n(x)$ لهما نفس الإشارة على المجال $]0;1[$.

✍ لنستنتج أن $g(x)\leq 0$ لكل x من $]0;1]$:   0,25

من❶ و❷ نستنتج أن إشارة $x^2-1+2x^2\ell n(x)$ سالبة على المجال $]0;1[$ أي g سالبة على المجال $]0;1[$

(لأن مجموع دالتين سالبتين $x\mapsto x^2-1$ و $x\mapsto 2x^2\ell n(x)$ هي دالة سالبة) و $g(1)=0$

إذن نستنتج أن $g(x)\leq 0$ لكل x من $]0;1]$.

2) ✍ لنبين أن: x^2-1 و $2x^2\ell n(x)$ لهما نفس الإشارة على المجال $]1;+\infty[$:   0,25 + 0,25

لدينا $x>1$ و منه $x^2>1$ إذن $x^2-1>0$ و بالتالي إشارة x^2-1 موجبة على المجال $]1;+\infty[$. ❸

وإشارة $2x^2\ell n(x)$ هي إشارة $\ell n(x)$ لأن لكل x من $]1;+\infty[$: $2x^2>0$ و $\ell n(x)>0$ على المجال $]1;+\infty[$

و بالتالي إشارة $2x^2\ell n(x)$ موجبة على المجال $]1;+\infty[$.❹

إذن x^2-1 و $2x^2\ell n(x)$ لهما نفس الإشارة على المجال $]1;+\infty[$.

✍ لنستنتج أن $g(x)\geq 0$ لكل x من $[1;+\infty[$:   0,25

من❸ و❹ نستنتج أن إشارة $x^2-1+2x^2\ell n(x)$ موجبة على المجال $[1;+\infty[$ أي g موجبة على المجال $[1;+\infty[$

(لأن مجموع دالتين موجبتين $x\mapsto x^2-1$ و $x\mapsto 2x^2\ell n(x)$ هي دالة موجبة) و $g(1)=0$

إذن نستنتج أن $g(x)\geq 0$ لكل x من $[1;+\infty[$.

II (1 أ– لنبين أن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ ولنؤول النتيجة مبيانيا: 0,25 + 0,25

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x^2-1)=-1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ell n(x)=-\infty$ إذن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x^2-1)\ell n(x)=(-1)\times(-\infty)$ وبالتالي $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$

و منه نستنتج أن (C) منحنى الدالة f يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$.

ب– ✍ لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: 0,25

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ell n(x)=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)\ell n(x)=(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب– ✍ لنبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ و لنستنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$: 0,25 + 0, 5

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ell n(x)=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)\ell n(x)=+\infty$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ ومنه نستنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$. (2 أ–

✍ لنبين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$: 1

لدينا لكل x من $]0;+\infty[$: $f(x)=(x^2-1)\ell n(x)$

ومنه $f'(x)=(x^2-1)'\ell n(x)+(x^2-1)(\ell n(x))'=2x\ell n(x)+(x^2-1)\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2-1+2x^2\ell n(x)}{x}$

و $g(x)=x^2-1+2x^2\ell n(x)$ وبالتالي $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$.

✍ لنؤول هندسيا النتيجة $f'(1)=0$: 0,25

لدينا $f'(1)=0$ و منه يقبل المنحنى (C) مماسا أفقيا في النقطة $A(1,0)$

ب– لنستنتج أن الدالة f تناقصية على المجال $]0,1]$ و تزايدية على المجال $[1,+\infty[$:0,25 + 0,25

لدينا $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ إذن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$:

☆ إذا كان $x\in]0,1]$ فإن $g(x)\le 0$ أي $f'(x)\le 0$ و بالتالي f تناقصية على المجال $]0,1]$.

☆ إذا كان $x\in[1,+\infty[$ فإن $g(x)\ge 0$ أي $f'(x)\ge 0$ و بالتالي f تزايدية على المجال $[1,+\infty[$.

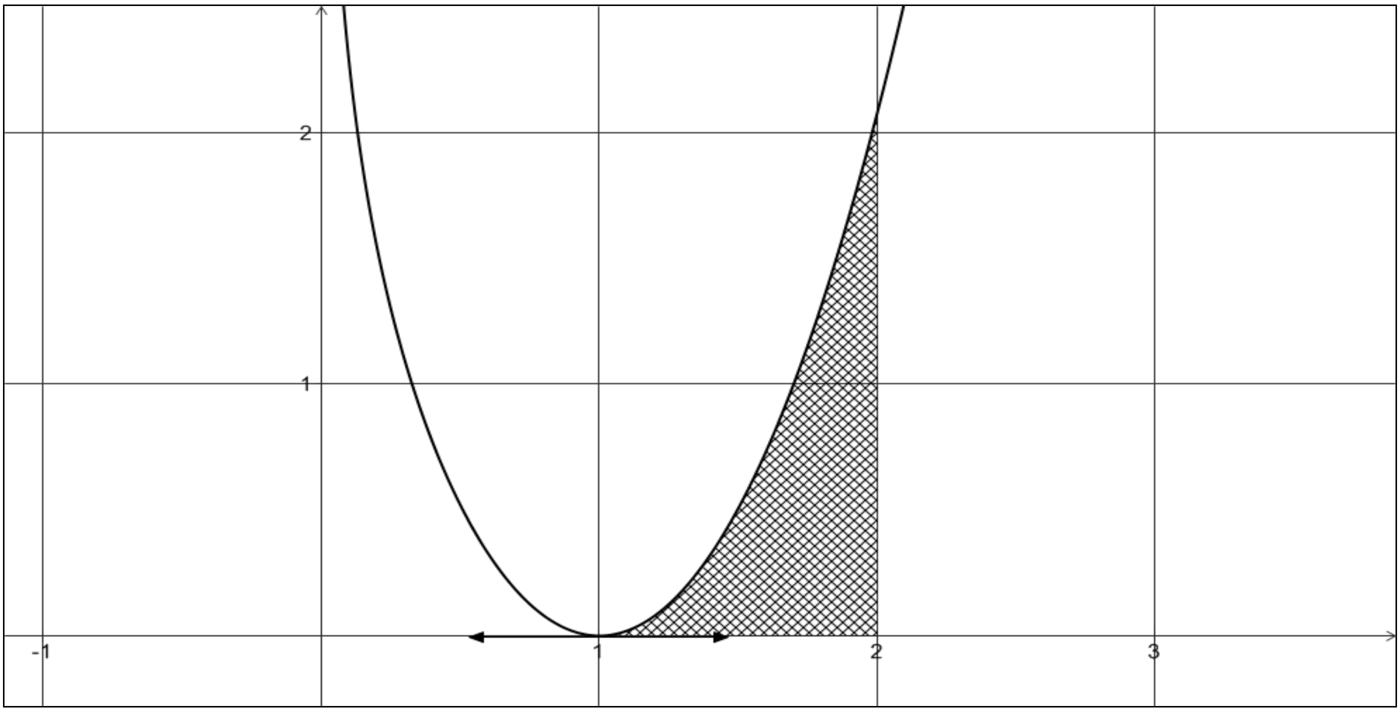
ج– ✍ لننجز جدول تغيرات الدالة f: 0,25

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

✍ لنبين أن $f(x)\ge 0$ لكل x من $]0;+\infty[$: 0,25

لدينا 0 قيمة دنيا مطلقة للدالة f عند $x=1$ إذن $f(x)\ge 0$ لكل x من $]0;+\infty[$.

3) لننشئ (C) منحنى الدالة f: 1



4) أ– لنبين أن $u : x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^2 - 1$ على $\mathbb{R}$: 0, 5

لدينا $x \mapsto x^3 - 1$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية و $\forall x \in \mathbb{R} \; ; u'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)' = \frac{3x^2}{3} - 1 = x^2 - 1$

إذن $u : x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^2 - 1$ على $\mathbb{R}$.

ب– لنبين باستعمال المكاملة بالأجزاء أن: $\int_1^2 (x^2 - 1)\ell n(x)dx = \frac{2}{9}(1 + 3\ell n(2))$ 1

$\begin{cases} u'(x) = x^2 - 1 \\ v(x) = \ell n(x) \end{cases}$ و منه $\begin{cases} u(x) = \frac{x^3}{3} - x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

إذن $\int_1^2 (x^2 - 1)\ell n(x)dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\ell n(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\ell n(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right)dx$

إذن $\int_1^2 (x^2 - 1)\ell n(x)dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\ell n(x)\right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{9} - x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 2\right)\ell n(2) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\ell n(1) - \left(\frac{8}{9} - 2 - \frac{1}{9} + 1\right)$

إذن $\int_1^2 (x^2 - 1)\ell n(x)dx = \frac{2\ell n(2)}{3} - 0 + \frac{2}{9}$ و بالتالي $\int_1^2 (x^2 - 1)\ell n(x)dx = \frac{2}{9}(1 + 3\ell n(2))$

ج– لنحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$: $1u.a = 9cm^2$ 0,25

لدينا $S = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x^2 - 1)\ell n(x)dx = \frac{2}{9}(1 + 3\ell n(2)) \times 9$ و بالتالي $S = 2(1 + 3\ell n(2))cm^2$