استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

(I) ليكن $E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. لكل زوج (a,b) من E^2 نضع : $a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$

0,25 ن — ① ⓐ تحقق أن لكل زوج (a,b) من $\mathbb{E}^2$: $a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)$

0,25 ن — ⓑ استنتج ان $\perp$ قانون تركيب داخلي في E .

0,50 ن — ② بين أن $(E,\perp)$ زمرة تبادلية .

(II) $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 .

نذكر أن : $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها : $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

و نذكر أن : $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

لتكن F مجموعة المصفوفات من $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل : $a\epsilon E$; $\mathrm{M}(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-a & a \\ a & \sqrt{2}-a \end{pmatrix}$

0,50 ن — ① ⓐ نضع : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ تحقق أن : $A^2 = -2A$ و أن : $M(a) = 1 + \frac{a}{\sqrt{2}}A$.

0,50 ن — ⓑ بين أن F جزء مستقر من : $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

② نعتبر التطبيق :
$$\begin{array}{llll} \varphi : & (E,\perp) & \longrightarrow & (F,\times) \\ & a & \longrightarrow & \varphi(a) = M(a) \end{array}$$

0,50 ن — ⓐ بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي .

0,50 ن — ⓑ استنتج بنية $(F,\times)$.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

ليكن a عددا عقديا مخالفا للعددين i و $-i$

0,25 ن — (I) ① ⓐ تحقق أن العدد العقدي $u = a + i$ حل للمعادلة $(E) :\ z^2 - (1+a)(1+i)z + (1+a^2)i = 0$.

0,25 ن — ⓑ حدد v الحل الثاني للمعادلة (E) .

② نفترض أن $|a| = 1$.

0,25 ن — ⓐ بين أن : $\frac{u}{v} \epsilon \mathbb{R}$

0,25 ن — ⓑ تحقق أن : $u^2 = a[(a-\bar{a}) + 2i]$

0,50 ن — ⓒ استنتج أن : $arg(u) = \frac{1}{2}arg(a) + \frac{\pi}{4}[\pi]$

0,50 ن — ③ بين أن $|u| + |v| \geq 2$

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

ليكن m عددا حقيقيا أكبر قطعا من 2 . و (E_m) مجموعة النقط $M(a)$ من المستوى العقدي بحيث :

$|u|+|v|=m$

0,50 ن ① بين أن (E_m) إهليلج مركزه أصل المعلم O .

② نضع : $a=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان .

0,25 ن ⓐ بين أن : $x^2+\left(1-\frac{4}{m^2}\right)y^2=\frac{m^2}{4}-1$ معادلة ديكارتية للإهليلج (E_m) .

0,25 ن ⓑ أنشىء الإهليلج (E_4) .

0,50 ن ③ نعتبر النقطتين $A(\sqrt{3})$ و $B(2i)$ رَأْسَيْ الإهليلج (E_4) . بين أن المستقيم (AB) مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$.

التمرين الثالث : (3,0 ن)

نعتبر المعادلة : $(E)\ : 195x-232y=1$.

0,50 ن ① ⓐ حدد $132\wedge 195$.

0,50 ن ⓑ بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $\mathcal{S}=\{(163+232k\,;137+195k)\ \ ;\ \ k\epsilon\mathbb{Z}\}$

0,25 ن ⓒ أوجد العدد الصحيح الطبيعي d الوحيد الذي يحقق : $0\leq d\leq 232$ و $195d\equiv 1[232]$.

0,25 ن ② بين أن العدد 233 عدد أولي.

③ لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و 232 . نعتبر التطبيق f من A نحو A المعرف بما يلي : مهما يكن a من A فإن $f(a)$ هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a^{195} على 233.

نقبل أن : $a^{232}\equiv 1[233]$: $\forall a\epsilon A\setminus\{0\}$.

0,50 ن ⓐ بين أن لكل عنصرين a و b من المجموعة A ، إذا كان $f(a)=f(b)$ فإن : $a=b$.

0,50 ن ⓑ ليكن a و b عنصرين من المجموعة A بحيث $f(a)=b$. حدد a بدلالة b .

0,50 ن ⓒ استنتج أن التطبيق f تقابل ثم حدد تقابله العكسي f^{-1} .

التمرين الرابع : (10,5 ن)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=1+(x-1)e^x$.

0,50 ن (I) ① بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $g(x)\geq 0$.

0,25 ن ② بين أن $x=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة : $g(x)=0$.

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{e^x+1} & ;\ \forall x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن ① أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)$

0,25 ن ② بين أن الدالة f متصلة في 0.

0,50 ن ③ ⓐ أحسب $f'(x)$ من أجل كل عنصر x من $\mathbb{R}^*$.

0,25 ن ⓑ إستنتج تغيرات الدالة f .

④ نعتبر التكامل : $J(x)=\int_0^x te^{-t}dt$ حيث x عدد حقيقي .

0,50 ن ⓐ باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $J(x)=e^{-x}(e^x-1-x)$.

1,00 ن ⓑ بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\leq J(x)\leq\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$

ن 0,50	ج بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\frac{1}{2}e^{\frac{x-\lvert x\rvert}{2}} \leq \frac{e^x-1-x}{x^2} \leq \frac{1}{2}e^{\frac{x+\lvert x\rvert}{2}}$
ن 0,75	د استنتج أن الدالة f قابلة للإشتقاق في 0 و أن $f'(0) = \frac{-1}{2}$.
ن 0,50	5 أ بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)}(e^x(x-1)+2+x)$
ن 0,50	ب أدرس إشارة $e^x(x-2)+2+x$ لكل x من $\mathbb{R}$.
ن 0,25	ج استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f''(x) > 0$.
ن 0,50	د أنشىء $(\mathscr{C})$

(III) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \;;\; \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

ن 0,25	1 بين أن $x = \ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$
ن 0,50	2 أ بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\lvert f'(x)\rvert \leq \frac{1}{2}$.
ن 0,50	ب بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $\lvert u_{n+1} - \ln 2\rvert \leq \frac{1}{2}\lvert u_n - \ln 2\rvert$
ن 0,50	ج استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: متقاربة و حدد نهايتها.

(IV) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{e^t-1}dt \;;\; \forall x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

ن 0,50	1 أ بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\frac{2x^2}{e^{2x}-1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x-1}$
ن 0,25	ب بين أن الدالة F متصلة في 0.
ن 0,50	ج بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق في 0 وأن : $F'(0) = 1$.
ن 0,50	2 أ بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $F'(x) = \frac{3-e^x}{e^x+1}f(x)$
ن 0,25	ب أدرس تغيرات الدالة F .

التمرين الأول : (3,0 ن)

■ (I) ① أ

ليكن الزوج (a,b) عنصرا من E^2 .

لدينا : $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(a-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(ab\sqrt{2}-a-b+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=a+b-ab\sqrt{2}$$

$$=a\perp b$$

■ (I) ① ب

يكفي أن نبين أن : $\forall(a,b)\epsilon E^2\ ;\ a\perp b\ \epsilon\ E$

ليكن الزوج (a,b) عنصرا من E^2 .

يعني : $b\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $a\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$

و منه : $b\sqrt{2}-1\neq 0$ و $a\sqrt{2}-1\neq 0$

و منه : $\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)\neq 0$

و منه : $\frac{-1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)\neq 0$

إذن : $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$

إذن : $a\perp b\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$

أي : $a\perp b\ \epsilon\ \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

أي : $a\perp b\ \epsilon\ E$

و بالتالي $\perp$ قانون تركيب داخلي في E .

■ (I) ②

لكي تكون $(E,\perp)$ زمرة تبادلية يكفي أن يكون $\perp$ تبادليا و تجميعيا و أن يقبل عنصرا محايدا في E وأن يقبل كل عنصر من E مماثلا من E .

ليكن الزوج (a,b) عنصرا من E^2 .

$$a\perp b\ =\ \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad a\perp b\ =\ \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b\sqrt{2}-1\right)\left(a\sqrt{2}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad a\perp b\ =b\perp a$$

و منه : $\perp$ تبادلي في E .

ليكن e العنصر المحايد للقانون $\perp$ في E

يعني : $(\forall x\epsilon E)\ ;\ x\perp e=e\perp x=x$

$$\Leftrightarrow\quad(\forall x\epsilon E)\ ;\ x+e-xe\sqrt{2}=x$$

$$\Leftrightarrow\quad(\forall x\epsilon E)\ ;\ e\left(1-x\sqrt{2}\right)=0$$

و بما أن : $x\ \epsilon\ E$ فإن : $x\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$

يعني : $1-x\sqrt{2}$ و بالتالي : $e=0$

و بما أن : $0\ \epsilon\ E$ فإن 0 هو العنصر المحايد للقانون $\perp$ في E .

ليكن x عنصرا من E .

و ليكن y مماثل x في E بالنسبة لـ $\perp$

$$x\perp y=y\perp x=0$$

$$\Leftrightarrow\quad x+y-xy\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad y\left(1-x\sqrt{2}\right)=-x$$

$$\Leftrightarrow\quad y=\frac{-x}{\left(1-x\sqrt{2}\right)}=\frac{x}{\left(x\sqrt{2}-1\right)}$$

و للتأكد من أن : $\frac{x}{\left(x\sqrt{2}-1\right)}\ \neq\ \frac{1}{\sqrt{2}}$

نفترض التساوي إذن : $x\sqrt{2}=x\sqrt{2}-1$

و منه : $0=1-$ و هذا تناقض واضح.

و من تم فإن : $\frac{x}{\left(x\sqrt{2}-1\right)}\ \epsilon\ E$

يعني أن كل عنصر x من E يقبل مماثلا و هو : $\frac{x}{\left(x\sqrt{2}-1\right)}$ من E بالنسبة للقانون $\perp$

خلاصة : $(E,\perp)$ زمرة تبادلية.

■(II) ① أ

لدينا : $A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

إذن : $A^2=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow\quad A^2=-2\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=-2A$$

و لدينا كذلك : $M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-a & a \\ a & \sqrt{2}-a \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \quad M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{a}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}}A}$$

■ (II) ① ب

يكفي أن نبين أن :

$$(\forall M(a) \epsilon F), (\forall M(b) \epsilon F) \; ; \; M(a) \times M(b) \; \epsilon \; F$$

في البداية نلاحظ أن $M(a)$ مصفوفة مربعة من الرتبة 2 و ذات معاملات حقيقية

إذن المجموعة F جزء من $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

ليكن $M(a)$ و $M(b)$ عنصرين من F بحيث : $(a,b) \; \epsilon \; E^2$

لدينا : $M(a) \times M(b) = \left(I + \frac{a}{\sqrt{2}}A\right)\left(I + \frac{b}{\sqrt{2}}A\right)$

$$\Leftrightarrow \quad M(a) \times M(b) = I + \frac{b}{\sqrt{2}}A + \frac{a}{\sqrt{2}}A + \frac{ab}{2}A^2$$

$$\Leftrightarrow \quad M(a) \times M(b) = I + \frac{b}{\sqrt{2}}A + \frac{a}{\sqrt{2}}A - \frac{ab}{2}A$$

$$\Leftrightarrow \quad M(a) \times M(b) = I + \frac{(a+b-ab)}{\sqrt{2}}A$$

$$\Leftrightarrow \quad M(a) \times M(b) = M(a \perp b)$$

لكي تكون المصفوفة $M(a \perp b)$ عنصرا من F يكفي أن يكون $a \perp b$ عنصرا من E

و بالفعل $a \perp b \; \epsilon \; E$ لأن $\perp$ قانون تركيب داخلي في E و $a \epsilon E$ و $b \epsilon E$.

إذن نحصل على : $M(a) \times M(b) \; \epsilon \; F$

و بالتالي F جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

■ (II) ② أ

لكي يكون التطبيق φ تشاكلا من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$ يكفي أن نتأكد من أن : $\forall \; (a,b) \; \epsilon \; E^2 \; ; \; \varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(a \perp b)$

و لكي يكون التطبيق φ تقابلا يكفي أن يكون شموليا و تباينيا .

ليكن a و b عنصرين من E .

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(a) \times \varphi(b) = M(a) \times M(b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(a) \times \varphi(b) = \left(I + \frac{a}{\sqrt{2}}A\right)\left(I + \frac{b}{\sqrt{2}}A\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(a) \times \varphi(b) = I + \frac{b}{\sqrt{2}}A + \frac{a}{\sqrt{2}}A + \frac{ab}{2}A^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(a) \times \varphi(b) = I + \frac{b}{\sqrt{2}}A + \frac{a}{\sqrt{2}}A - \frac{ab}{2}A$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(a) \times \varphi(b) = I + \frac{(a+b-ab)}{\sqrt{2}}A$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(a) \times \varphi(b) = M(a \perp b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(a \perp b)$$

لتكن S مصفوفة من F .إذن حسب تعريف المجموعة F :

$$(\exists \; a \; \epsilon \; E) \; ; \; S = M(a)$$

و منه حسب تعريف التطبيق φ : $(\exists \; a \; \epsilon \; E) \; ; \; S = \varphi(a)$

و بالتالي φ تطبيق **شمولي** من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$

ليكن a و b عنصرين من E بحيث : $\varphi(a) = \varphi(b)$

إذن حسب تعريف التطبيق φ : $M(a) = M(b)$

يعني : $\left(I + \frac{a}{\sqrt{2}}A\right) = \left(I + \frac{b}{\sqrt{2}}A\right)$

و منه : $\boxed{a = b}$

و بالتالي : φ تطبيق **تبايني** من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$

خلاصة : φ تشاكل **تقابلي** من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$.

■ (II) ② ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

و بما أن $(E,\perp)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\perp$ هو 0 و كل عنصر x من E يقبل مماثلا $\left(\frac{x}{x\sqrt{2}-1}\right)$

فإن $(F,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\times$ هو $\varphi(0)$ و كل عنصر y من F يقبل مماثلا $\varphi\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)$

و لدينا : $\varphi(0) = I + \frac{0}{\sqrt{2}}A = I$

$$\varphi\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right) = I + \frac{y}{\sqrt{2}(y\sqrt{2}-1)}A = I + \frac{y}{2y-\sqrt{2}}A$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-y}{\sqrt{2}-2y} & \frac{y}{2y-\sqrt{2}} \\ \frac{y}{2y-\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}-y}{\sqrt{2}-2y} \end{pmatrix} = M\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)$$

و للتأكد :

$$M(y)\times M\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)=\left(I+\frac{y}{\sqrt{2}}A\right)\left(I+\frac{y}{2y-\sqrt{2}}A\right)$$

$$= I+\frac{y}{\sqrt{2}}A+\frac{y}{2y-\sqrt{2}}A+\frac{y^2}{\sqrt{2}(2y-\sqrt{2})}A^2$$

$$= I+\frac{y}{\sqrt{2}}A+\frac{y}{\sqrt{2}(\sqrt{2}y-1)}A-\frac{2y^2}{2(\sqrt{2}y-1)}A$$

$$= I+\left(\frac{2(\sqrt{2}y-1)y+2y-2\sqrt{2}y^2}{2(\sqrt{2}y-1)\sqrt{2}}\right)A$$

$$= I+\left(\frac{\cancel{2\sqrt{2}y^2}\cancel{-2y}\cancel{+2y}\cancel{-2\sqrt{2}y^2}}{2(\sqrt{2}y-1)\sqrt{2}}\right)A$$

$$= I+0$$

$$= I$$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

■ (I) 1 أ

يكفي أن نبين أن :

$$(a+i)^2-(1+a)(1+i)(a+i)+i(1+a^2)=0$$

و للوصول إلى ذلك ننشر أو نعمل. نختار تقنية التعميل.

لدينا : $(a+i)^2+i(1+a^2)=(a+i)^2+i(a^2-i^2)$

$$=(a+i)(a+i)+i(a-i)(a+i)$$
$$=(a+i)(a+i)+(ai+1)(a+i)$$
$$=(a+i)(a+i+ai+1)$$
$$=(a+i)(a+1)(i+1)$$

و منه : $(a+i)$ حل للمعادلة (E) .

■ (I) 1 ب

تذكير : إذا كان u و v هما حلا المعادلة : $ax^2+bx+c=0$

فإن : $uv=\frac{c}{a}$ و $u+v=\frac{-b}{a}$

لدينا u و v هما حلا المعادلة (E) .

إذن : $u+v=\frac{(1+a)(1+i)}{1}$

نعوض u بقيمته نحصل على : $(i+a)+v=(1+a)(1+i)$

و منه : $v=(1+a)(1+i)-(i+a)$

$$\Leftrightarrow\quad v=1+i+a+ai-i-a$$
$$\Leftrightarrow\quad v=1+ai$$

■ (I) 2 أ

نعلم أن كل عدد حقيقي يكون دائما مساويا لمرافقه و سوف نستغل هذه الخاصية لكي نبرهن على أن $\frac{u}{v}$ عدد حقيقي .

لدينا : $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)}=\overline{\left(\frac{a+i}{ai+1}\right)}=\frac{\bar{a}-i}{1-i\bar{a}}$

بما أن : $|a|=1$ فإن : $|a|=\sqrt{a\bar{a}}=1$

إذن : $\bar{a}=\frac{1}{a}$

و منه : $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)}=\frac{\bar{a}-i}{1-\bar{a}i}=\frac{\frac{1}{a}-i}{1-\frac{1}{a}i}=\frac{1-ai}{a-i}$

نضرب بسط و مقام النتيجة الأخيرة في العدد العقدي i نحصل على :

$$\overline{\left(\frac{u}{v}\right)}=\frac{1-ai}{a-i}=\frac{a+i}{ai+1}=\frac{u}{v}$$

إذن نستنتج مما سبق أن : $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)}=\frac{u}{v}$

يعني أن العدد $\frac{u}{v}$ عدد حقيقي.

■ (I) 2 ب

لدينا : $u^2=(a+i)^2=a^2+2ai-1$

$$\Leftrightarrow\quad u^2=a\left(a+2i-\frac{1}{a}\right)$$
$$\Leftrightarrow\quad u^2=a(a+2i-\bar{a})$$
$$\Leftrightarrow\quad u^2=a[(a-\bar{a})+2i]$$

■ (I) 2 ج

بصفة عامة، إذا كان : $z=\Re e(z)+i\Im m(z)$ فإن $z-\bar{z}=2i\Im m(z)$

لدينا حسب السؤال ب : $u^2=a[(a-\bar{a})+2i]$

إذن عمدة الطرف الأيمن يوافق عمدة الطرف الثاني بترديد 2π

إي : $2Arg(u)\equiv Arg\left(a\big((a-\bar{a})+2i\big)\right)[2\pi]$

يعني : $2Arg(u)\equiv Arg(a)+Arg\big((a-\bar{a})+2i\big)[2\pi]$

لدينا : $a-\bar{a}+2i=2i\Im m(a)+2i=2i(\Im m(a)+1)$

و منه : $Arg(\,a-\bar{a}+2i)\equiv Arg(2i)+Arg(\Im m(a)+1)$

لدينا $2i$ عدد تخيلي صرف. إذن : $Arg(2i)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و لدينا كذلك $(\Im m(a)+1)$ عدد حقيقي. إذن : $Arg(\Im m(a)+1)\equiv 0[2\pi]$

و بالتالي : $2Arg(u)\equiv Arg(a)+\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و منه : $Arg(u)\equiv\frac{1}{2}Arg(a)+\frac{\pi}{4}[\pi]$

■ (II)①

لتكن H صورة العدد العقدي i

و لتكن $\overline{H}$ صورة العدد العقدي $-i$

و لتكن M صورة العدد العقدي a

لدينا : $|u|+|v|=m$ يعني : $|a+i|+|ai+1|=m$

لنبين أن : $|ai+1|=|a-i|$

لدينا : $ai+1=i(a-i)$

و منه : $|ai+1|=|i(a-i)|$

يعني : $|ai+1|=|i||a-i|$

أي : $|ai+1|=1|a-i|=|a-i|$

إذن : $|a+i|+|a-i|=m$

و منه : $|a-(-i)|+|a-i|=m$

أي : $\overline{H}M+HM=m$

لكي تكون مجموعة النقط (E_m) إهليلج يكفي أن نتحقق من أن : $\overline{H}H\leq m$

لدينا : $\overline{H}H=|i-(-i)|=|2i|=2$

و لدينا حسب المعطيات : $m\geq 2$ إذن : $m\geq\overline{H}H$

و بالتالي (E_m) إهليلج مركزه هو منتصف القطعة $[\overline{H}H]$ أي النقطة O

■ (II)②أ

بما أن (E_m) إهليلج.

فإن معادلته الديكارتية تكتب على الشكل : $(E_m)\ :\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

لنحدد الآن قيمتي العددين a و b .

لدينا $2b=m$ إذن $b=\frac{m}{2}$

و منه : $b^2=\dfrac{m^2}{4}$

و نعلم كذلك أن : $c=\frac{\overline{H}H}{2}=1$ و $c^2=b^2-a^2$

إذن : $a^2=b^2-c^2$

و بالتالي المعادلة الديكارتية للإهليلج (E_m) هي :

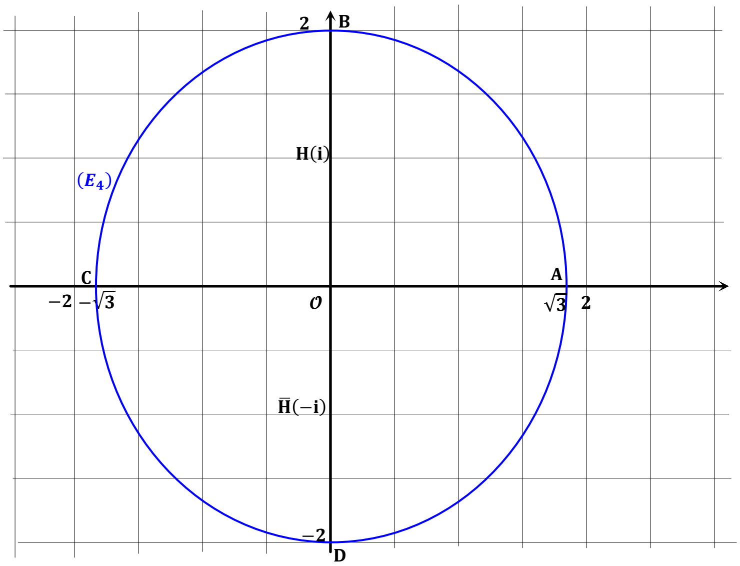
$$(E_m)\ :\ \frac{x^2}{\left(\frac{m^2}{4}-1\right)}+\frac{y^2}{\left(\frac{m^2}{4}\right)}=1$$

يعني : $\boxed{(E_m)\ :\ x^2+\left(1-\dfrac{4}{m^2}\right)y^2=\left(\dfrac{m^2}{4}-1\right)}$

■ (II)②ب

(E_4) إهليلج يتميز بالعناصر التالية :

- مركزه O
- رؤوسه : $A(\sqrt{3},0)$ و $B(-\sqrt{3},0)$ و $C(0,2)$ و $D(0,-2)$
- بؤرتاه : $H(0,1)$ و $\overline{H}(0,-1)$.
- تباعده المركزي : $e=\frac{c}{b}=\frac{1}{2}$



■ (II)③

في المجموعة $\mathbb{C}$ لدينا : $A(\sqrt{3})$ و $B(2i)$

إذن في المجموعة $\mathbb{R}^2$ لدينا : $A(\sqrt{3},0)$ و $B(0,2)$

لنحدد معادلة المستقيم (AB) و التي تكتب في شكلها المختصر كالتالي :

$$\boxed{(AB)\ :\ y=px+q}$$

بحيث p هو الميل و q هو الأرتوب عند الأصل.

$$p=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2}{-\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

إذن : $(AB)\ :\ y=\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}x+q$

و لدينا : $B(0,2)$ نقطة من (AB) .

إذن : $2=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\times 0+b$ و منه : $b=2$

و بالتالي : $\boxed{(AB)\ :\ y=\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}x+2}$

لكي يكون (AB) مماسا للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ يكفي أن نحدد نقطة تقاطع (AB) و $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ ثم نحدد بعد ذلك معادلة المماس لـ $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في تلك النقطة و نبين أن تلك المعادلة ما هي إلا معادلة المستقيم (AB) .

على بركة الله، لدينا حسب السؤال ② أ :

$$\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right) : x^2 + \left(1 - \frac{4}{\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2}\right) y^2 = \left(\frac{\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2}{4} - 1\right)$$

أي : $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right) : x^2 + \frac{9}{16} y^2 = \frac{9}{7}$

لتحديد نقطة تقاطع (AB) و $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ نحل النظمة التالية :

$$\begin{cases} x^2 + \frac{9}{16} y^2 = \frac{9}{7} \\ y = \frac{-2\sqrt{3}}{3} x + 2 \end{cases}$$

نعوض y بقيمته في المعادلة $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ نحصل على :

$$x^2 + \frac{9}{16}\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3} x + 2\right)^2 = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{9}{16}\left(\frac{4}{3} x^2 + 4 - \frac{8\sqrt{3}}{3} x\right) = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{3}{4} x^2 + \frac{9}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{3} x = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{7}{4} x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{3} x + \frac{27}{28} = 0$$

نضرب طرفي المعادلة في العدد 28 نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad (7x)^2 - 2(7x)(3\sqrt{3}) + (3\sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (7x - 3\sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (7x - 3\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{3\sqrt{3}}{7}}$$

نعوض x في معادلة (AB) نجد :

$$\boxed{y = \frac{-2\sqrt{3}}{3} . \frac{3\sqrt{3}}{7} + 2 = \frac{8}{7}}$$

من جهة أخرى لدينا معادلة المماس لـ $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في النقطة $\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}, \frac{8}{7}\right)$

تكتب على شكل : $x x_0 + \frac{9}{16} y y_0 = \frac{9}{7}$

بحيث : $x_0 = \frac{3\sqrt{3}}{7}$ و $y_0 = \frac{8}{7}$

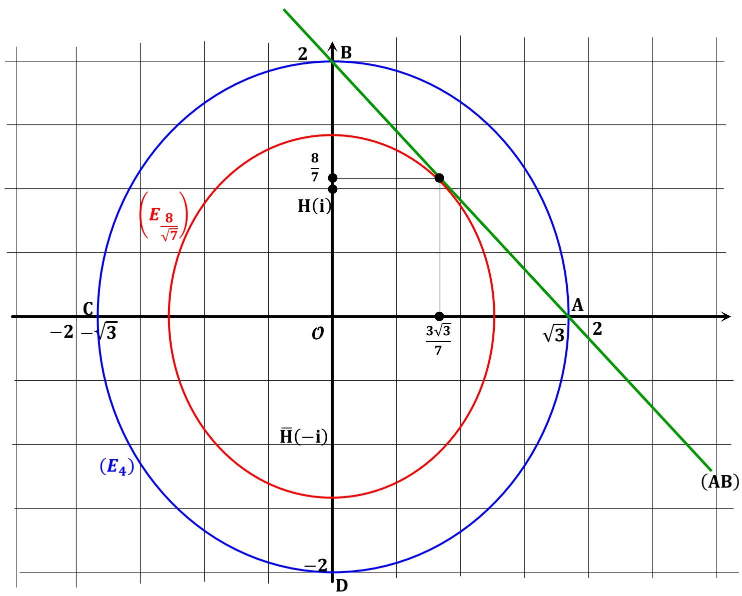
إذن معادلة المماس هي : $\frac{3\sqrt{3}}{7} x + \frac{9}{16} y \frac{8}{7} = \frac{9}{7}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3\sqrt{3}}{7} x + \frac{9}{14} y = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} x$$

و هذه الكتابة الأخيرة هي بالفعل معادلة المستقيم (AB) .

و بالتالي (AB) هو المماس لـ $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في النقطة : $\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}, \frac{8}{7}\right)$.



التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ ① أ

نُدِير خوارزمية أقليدس و نوقف محركاتها فور الحصول على باقي منعدم.

المرحلة الأولى :

232	195
	1
37	

37 غير منعدم إذن نواصل.

المرحلة الثانية :

195	37
	5
10	

10 غير منعدم إذن نواصل.

المرحلة الثالثة :

37	10
	3
7	

7 غير منعدم إذن نواصل.

المرحلة الرابعة :

10	7
3	1

3 غير منعدم إذن واصل.

المرحلة الخامسة :

7	3
1	2

1 غير منعدم إذن واصل.

المرحلة السادسة :

3	1
0	3

0 منعدم إذن **توقف**.

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 232 و 195 هو آخر باقي غير منعدم أي : 1

و بالتالي : $\boxed{195 \wedge 232 = 1}$

■ 1 ب

في البداية يجب علينا أن نبحث عن الحل البديهي (أو الحل الخاص) لـ (E) .

لدينا حسب خوارزمية أقليدس الواردة في السؤال السابق :

المرحلة الأولى : $37 = 232 - 1 \times 195$

المرحلة الثانية : $10 = 195 - 5 \times 37$

المرحلة الثالثة : $7 = 37 - 3 \times 10$

المرحلة الرابعة : $3 = 10 - 1 \times 7$

المرحلة الخامسة : $1 = 7 - 2 \times 3$

الطريقة هي كالتالي :

ننطلق من المرحلة الخامسة : $1 = 7 - 2 \times 3$

- ثم نعوض 3 بقيمتها ثم نبسط
- ثم نعوض 7 بقيمتها ثم نبسط
- ثم نعوض 10 بقيمتها ثم نبسط
- ثم نعوض 37 بقيمتها ثم نبسط

إلى العمل : لدينا $\boxed{1 = 7 - 2 \times 3}$

نعوض 3 في هذا التعبير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$\boxed{1 = 3 \times 7 - 2 \times 10}$$

نعوض 7 في هذا التعبيرالأخير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$\boxed{1 = 3 \times 37 - 11 \times 10}$$

نعوض 10 في هذا التعبيرالأخير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$\boxed{1 = 58 \times 37 - 11 \times 195}$$

نعوض 37 في هذا التعبيرالأخير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$\boxed{1 = 58 \times \mathbf{232} - 69 \times \mathbf{195}}$$

إذن الحل الخاص للمعادلة هو الزوج : $(-69,-58)$

سوف نحدد الآن صيغة الحل العام للمعادلة (E)

يعني : $195x - 232y = 1$

و لدينا : $195(-69) - 232(-58) = 1$

ننجز عملية الفرق بين هاتين المتساويتين نحصل على :

$$195(x+69) - 232(y+58) = 0$$

يعني : $\boxed{195(x+69) = 232(y+58)}$ $(*)$

إذن : $195 \,/\, 232(y+58)$

إذن حسب $(Gauss)$: $195 \,/\, (y+58)$ لأن : $195 \wedge 232 = 1$

و منه : $(\exists k' \epsilon \mathbb{Z})$; $y + 58 = 195k'$

يعني : $\boxed{y = 195k' - 58}$

لإيجاد قيمة x نعوض y في المعادلة $(*)$ نحصل على :

$$195(x+69) = 232(195k')$$

يعني : $\boxed{x = 232k' - 69}$

بما أن k' عدد نسبي فإن : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z})$; $k' = k + 1$

و منه : $x = 232(k+1) - 69$

أي : $\boxed{x = 232k + 163}$

و لدينا كذلك : $y = 195k' - 58$

أي : $y = 195(k+1) - 58$

و منه : $\boxed{y = 195k + 137}$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(232k + 163 \,; 195k + 137) \;\; / \;\; k \epsilon \mathbb{Z}\}}$$

■ 1 ج

ننطلق من الشرط : $195d \equiv 1[232]$

الذي يعني : $232 \,/\, (195d - 1)$

و منه : $(\exists b \epsilon \mathbb{Z})$; $232b = 195d - 1$

أي : $195d - 232b = 1$

و منه : (d, b) حل للمعادلة (E) .

إذن (d, b) عنصر من $(\mathcal{S})$.

و منه : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z})$; $\begin{cases} d = 163 + 232k \\ b = 137 + 195k \end{cases}$

لدينا الشرط الآخر $0 \le d \le 232$

يعني : $0 \le 163 + 232k \le 232$

و منه : $0,7 \le k \le 0,2$

العدد الصحيح النسبي الوحيد المحصور بين 0,2 و 0,7 هو 0

إذن : $\boxed{d = 163 + 232 \times 0 = 163}$

■ 2

يكفي : أن نتحقق من أن جميع الأعداد الأولية الأصغر من أو تساوي $\sqrt{233}$ لا تقسم العدد 233 .

و تلك الأعداد الأولية هي : 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13

■ 3 أ

ليكن a و b عنصرين من $A \setminus \{0\}$ بحيث : $f(a) = f(b)$.

لدينا : $\begin{cases} a^{195} \equiv f(a)[233] \\ b^{195} \equiv f(b)[233] \end{cases}$

بما أن $f(a) = f(b)$ فإن : $a^{195} \equiv b^{195}[233]$

و منه : $a^{195d} \equiv b^{195d}[233]$

و لدينا : $195d \equiv 1[232]$ يعني : $195d = 232k + 1$

إذن : $\boxed{a^{232k+1} \equiv b^{232k+1}[233]}$

من جهة أخرى لدينا حسب مبرهنة فيرما : $a^{232} \equiv 1[233]$

إذن : $a^{232k} \equiv 1[233]$ و منه : $\boxed{a^{232k+1} \equiv a[233]}$ (1)

بنفس الطريقة نجد : $\boxed{b^{232k+1} \equiv b[233]}$ (2)

بما أن : $a^{232k+1} \equiv b^{232k+1}[233]$ فإن : $a \equiv b[233]$

و ذلك باستعمال النتيجتين (1) و (2)

و منه : 233 يقسم $|a - b|$.

لدينا : $a\epsilon A$ و $b\epsilon A$

يعني : $0 < a \le 232$ و $0 < b \le 232$

و منه : $|a - b| \le 232$

نلاحظ أن 233 يقسم عددا أصغر منه و هو $|a - b|$ إذن : $|a - b| = 0$

و بالتالي : $a = b$

■ 3 ب

ليكن a و b عنصرين من A بحيث: $f(a) = b$

لدينا : $a^{195} \equiv f(a)[233]$

و بما أن : $f(a) = b$ فإن : $a^{195} \equiv b[233]$

و منه : $\boxed{a^{195d} \equiv b^{d}[233]}$ (3)

من جهة أخرى لدينا حسب مبرهنة $(Fermat)$: $a^{232} \equiv 1[233]$

إذن : $\boxed{a^{-232k} \equiv 1[233]}$ (4)

نضرب المتوافقتين (3) و (4) طرفا بطرف نحصل على :
$a^{195d - 232k} \equiv b^{d}[233]$

و منه : $a^{1} \equiv b^{163}[233]$ لأن $d = 163$ هو العدد الوحيد الذي يحقق الشرطين $195d \equiv 1[232]$ و $d\epsilon A$

و منه : $a \equiv b^{163}[233]$ هو الجواب الأخير.

كما يمكن إظافة ما يلي : $233 / (a - b^{163})$

يعني : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ (a - b^{163}) = 233k$

أي : $\boxed{a = b^{163} + 233k\ ;\ k\epsilon\mathbb{Z}}$

■ 3 ج

نستنتج من نتيجة السؤال 3 أ :

$\boxed{\text{أن } f \text{ تطبيق تبايني من } A \text{ نحو } A}$

كما نستنتج من نتيجة السؤال 3 ب :

$\boxed{\text{أن التطبيق } f \text{ شمولي من } A \text{ نحو } A}$

إذن f تقابل من A نحو A و تقابله العكسي f^{-1} نستنتجه من جواب السؤال ب:

$$\boxed{\begin{array}{l} f : A \to A \\ \quad a \to f(a) \equiv a^{195}[233] \end{array}}$$

و

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{-1} : A \to A \\ \quad b \to f^{-1}(b) \equiv b^{163}[233] \end{array}}$$

التمرين الرابع : (10,5 ن)

■ (I) ①

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

لدينا : $g'(x) = e^x + e^x(x-1) = xe^x$

بما أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ e^x > 0$

فإن إشارة $g'(x)$ متعلقة فقط بإشارة x .

إذا كان $x = 0$ فإن $g'(x) = 0$

إذا كان $x > 0$ فإن $g'(x) > 0$

إذا كان $x < 0$ فإن $g'(x) < 0$

و لدينا : $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

إذن : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$

و لدينا كذلك : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

نلخص النتائج المحصل عليها في الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ حسب هذا الجدول أن القيمة الدنوية للدالة g هي 0

و g دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ g(x) \geq 0$

■ (I) ②

لدينا g دالة تناقصية قطعا على المجال $]-\infty, 0[$

إذن : $(\forall x < 0)\ ;\ g(x) > 0$

و لدينا g دالة تزايدية قطعا على المجال $]0, +\infty[$

إذن : $(\forall x > 0)\ ;\ g(x) > 0$

و لدينا العنصر الوحيد الذي صورته بالدالة g منعدمة هو 0 . إذن : $\boxed{g(0) = 0}$.

■ (II) ①

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^x - 1}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{(+\infty) - 0} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + x) = 0 + (+\infty) = +\infty$$

■ (II) ②

لدينا : $$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \left(\frac{x}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to0} \left(\frac{1}{\frac{e^x - e^0}{x - 0}}\right)$$

بما أن : $$\lim_{x\to0} \left(\frac{e^x - e^0}{x - 0}\right) = e^0 = 1$$

فإن : $$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{1}{1} = 1 = f(0)$$

و منه f دالة متصلة في الصفر.

■ (II) ③ أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^*$.

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x - 1}\right)' = \frac{(e^x - 1) - xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow\ f'(x) = \frac{-1 - e^x(x-1)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

■ (II) ③ ب

لدينا حسب السؤال أ $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{(e^x - 1)^2}$

بما أن $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*)\ ;\ 0 < (e^x - 1)^2$

فإن إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $g(x)$

لدينا g تنعدم في نقطة واحدة أفصولها 0 و ذلك حسب السؤال (I) ②

إذن $f'(x)$ تنعدم إذا كان $x = 0$

و لدينا كذلك حسب السؤال (I) ① $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ g(x) \geq 0$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*)\ ;\ f'(x) \leq 0$

و لدينا : $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^x - 1}\right) = \frac{-\infty}{0 - 1} = +\infty$$

و لدينا كذلك حسب السؤال (II) ① : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

و من هذه الدراسة نستنتج جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

■(II) 4 أ

لدينا : $J(x) = \int_0^x te^{-t}\,dt$

نضع : $u(t) = t$ إذن : $u'(t) = 1$

و نضع : $v'(t) = e^{-t}$ إذن : $v(t) = -e^{-t}$

و منه : $J(x) = [uv]_0^x - \int_0^x u'v\,dt$

$$\Leftrightarrow \quad J(x) = [t(-e^{-t})]_0^x - \int_0^x (-e^{-t})\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad J(x) = [-te^{-t}]_0^x + [-e^{-t}]_0^x$$

$$\Leftrightarrow \quad J(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{J(x) = e^{-x}(e^x - x - 1)}$$

■(II) 4 ب

ليكن x عددا حقيقيا . نفصل بين ثلاث حالات :

الحالة الأولى : إذا كان x موجب فإن : $|x| = x$

و منه : $|x| + x = 2x$ و $x - |x| = 0$

ليكن $0 \le t \le x$ إذن $e^{-x} \le e^{-t} \le e^0$

و منه : $te^{-x} \le te^{-t} \le t$

ندخل التكامل على الترتيب نحصل على :

$$\int_0^x te^{-x}\,dt \le \int_0^x te^{-t}\,dt \le \int_0^x t\,dt$$

يعني : $e^{-x}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \le J(x) \le \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$

ومنه : $\frac{x^2}{2}e^{-x} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}$

و بالتالي : $\boxed{\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}}$

الحالة الثانية : إذا كان x سالب فإن : $|x| = -x$

و منه : $|x| + x = 0$ و $x - |x| = 2x$

ليكن $x \le t \le 0$ إذن $e^0 \le e^{-t} \le e^{-x}$

و منه : $te^{-x} \le te^{-t} \le t$ (تغير الترتيب لأن t عدد سالب)

ندخل التكامل على الترتيب نحصل على :

$$\int_x^0 te^{-x}\,dt \le \int_x^0 te^{-t}\,dt \le \int_x^0 t\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x}\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^0 \le -J(x) \le \left[\frac{t^2}{2}\right]_x^0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-x^2}{2}e^{-x} \le -J(x) \le \frac{-x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{2} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

الحالة الثالثة : إذا كان x منعدم فإن : $J(0) = 0$

و منه : $\boxed{\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}}$

لأن : $0 \le 0 \le 0$

خلاصة :

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \quad \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}}$$

■(II) 4 ج

لدينا حسب السؤال ب

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \quad \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

و منه حسب السؤال أ

$$\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \le e^{-x}(e^x - 1 - x) \le \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

نفترض أن $x \neq 0$ ثم نضرب أطراف هذا التأطير في العدد الموجب $\frac{e^x}{x^2}$

علما أن هذا الترتيب سوف لن يتغير نحصل على :

$$\frac{1}{2}e^x e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \le \frac{(e^x - 1 - x)}{x^2} \le \frac{1}{2}e^x e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

و بالتالي بعد تبسيط طرف اليمين و طرف اليسار نحصل على :

$$\boxed{\frac{1}{2}e^{\left(\frac{x-|x|}{2}\right)} \le \frac{(e^x - 1 - x)}{x^2} \le \frac{1}{2}e^{\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}}$$

■(II) 4 د

لدينا حسب نتيجة السؤال ج

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{2}e^{\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}}_{\xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}} \le \frac{(e^x - 1 - x)}{x^2} \le \underbrace{\frac{1}{2}e^{\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}}_{\xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}}}$$

إذن : $\boxed{\lim_{x \to 0}\left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2}\right) = \frac{1}{2}}$

و لدينا من جهة أخرى :

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x-e^x+1}{xe^x-x}\right)$$

نحاول إظهار الكمية $\left(\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)$ نحصل على :

$$\lim_{x\to0^+}-\left(\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)\left(\frac{x}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0^+}-\left(\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)f(x)$$

لدينا حسب السؤال (II) 2 : f متصلة في 0

إذن : $\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=1$

و بالتالي نستنتج أن : $\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\frac{-1}{2}\times1=\boxed{\frac{-1}{2}}$

إذن f قابلة للاشتقاق في الصفر و $f'(0)=\frac{-1}{2}$

■ (II) 5 أ

لدينا : $f'(x)=\frac{-g(x)}{(e^x-1)^2}$

$$\Rightarrow\quad f''(x)=\frac{-g'(x)(e^x-1)^2+g(x)(2(e^x-1)e^x)}{(e^x-1)^4}$$

$$=\frac{-xe^x(e^x-1)^2+(1+(x-1)e^x)(2(e^x-1)e^x)}{(e^x-1)^4}$$

$$=\frac{-xe^x(e^x-1)^2+2(e^x-1)e^x+2(x-1)(e^x-1)e^{2x}}{(e^x-1)^4}$$

$$=\frac{-xe^x(e^x-1)+2e^x+2(x-1)e^{2x}}{(e^x-1)^3}$$

$$=\frac{e^x(-xe^x+x+2+2xe^x-2e^x)}{(e^x-1)^3}$$

$$=\frac{e^x(xe^x+x+2-2e^x)}{(e^x-1)^3}$$

$$=\frac{e^x\left(e^x(x-2)+(x+2)\right)}{(e^x-1)^3}$$

■ (II) 5 ب

نضع : $\varphi(x)=e^x(x-2)+2+x$

لدينا : $\varphi'(x)=(xe^x-2e^x+2+x)'$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi'(x)=xe^x+e^x-2e^x+1$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi'(x)=xe^x-e^x+1$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi'(x)=e^x(x-1)+1$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi'(x)=g(x)$$

و نعلم حسب السؤال (I) 1 : $g(x)\geq0\ ;\ (\forall x\in\mathbb{R})$

و بالتالي : $\varphi'(x)\geq0\ ;\ (\forall x\in\mathbb{R})$

أي φ دالة تزايدية على $\mathbb{R}$.

و لدينا : $\varphi(0)=0$ و f دالة تزايدية على $\mathbb{R}$.

إذا كان $x\geq0$ فإن : $\varphi(x)\geq\varphi(0)=0$

إذا كان $x\leq0$ فإن : $\varphi(x)\leq\varphi(0)=0$

■ (II) 5 ج

لدينا : $f''(x)=\frac{e^x}{(e^x-1)^3}\left(e^x(x-2)+(x+2)\right)$

$$f''(x)=\frac{e^x}{(e^x-1)^2}\times\frac{\varphi(x)}{(e^x-1)}$$

لدينا : $(e^x-1)^2>0$ و $e^x>0\ ;\ (\forall x\in\mathbb{R}^*)$

إذن إشارة $f''(x)$ تتعلق بإشارة $\varphi(x)$ و (e^x-1)

إذا كان $x>0$ فإن : $\varphi(x)>0$ و $e^x>e^0$

إذن : $\boxed{f''(x)>0}$

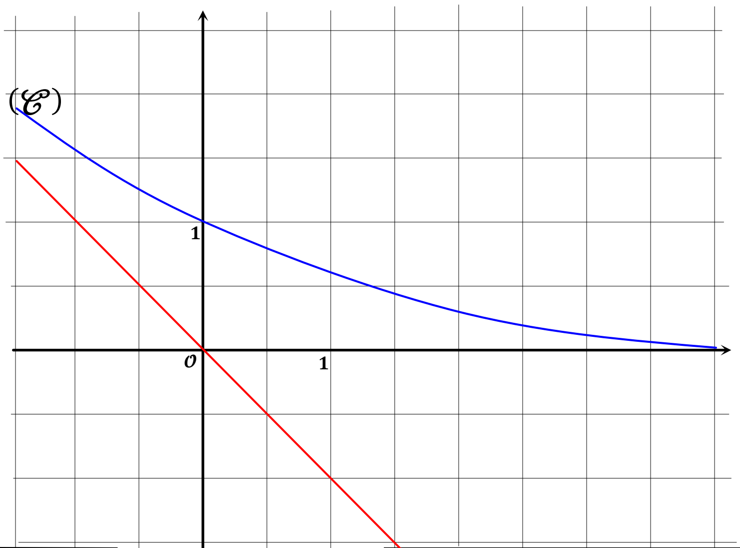
إذا كان $x<0$ فإن $\varphi(x)<0$ و $e^x<e^0$

إذن : $f''(x)>0$

و في كلتا الحالتين نلاحظ أن : $f''(x)>0\ ;\ (\forall x\in\mathbb{R}^*)$

و هذا يعني أن منحنى الدالة f محدب

■ (II) 5 د



■(III)①

لنحل المعادلة : $f(x)=x$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{e^x-1}=x$$

$$\Leftrightarrow \quad x=xe^x-x$$

$$\Leftrightarrow \quad e^x=2$$

$$\Leftrightarrow \quad x=ln\,2$$

إذن $\ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=x$

■(III)②أ

يكفي أن نبين أن : $\frac{-1}{2}\le f'(x)\le\frac{1}{2}$

لدينا حسب السؤال (II)⑤ج $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ f''(x)>0$

إذن f' دالة تزايدية على $\mathbb{R}^*$

إذا كان $x>0$ فإن : $f'(x)\ge f'(0)$

يعني : $\boxed{f'(x)\ge\frac{-1}{2}}$ (1)

لدينا من جهة أخرى : $f'(x)=\frac{-g(x)}{(e^x-1)^2}\le 0$

و ذلك لأن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ g(x)\ge 0$

إذن من الكتابة $f'(x)\le 0$ نستنتج أن : $f'(x)\le 0\le\frac{1}{2}$

و منه : $\boxed{f'(x)\le\frac{1}{2}}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ \frac{-1}{2}\le f'(x)\le\frac{1}{2}$

يعني : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ |f'(x)|\le\frac{1}{2}$

■(III)②ب

بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإنه بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على أي مجال من $\mathbb{R}$. نختار المجال الذي طرفاه $\ln 2$ و u_n .

إذن يوجد عدد c محصور بين $\ln 2$ و u_n بحيث :

$$\frac{f(u_n)-f(\ln 2)}{u_n-\ln 2}=f'(c)$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{f(u_n)-f(\ln 2)}{u_n-\ln 2}\right|=|f'(c)|$$

$$\Rightarrow \quad |f(u_n)-f(\ln 2)|=|f'(c)||u_n-\ln 2|$$

بما أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ f'(x)\le\frac{1}{2}$

إذن : $f'(c)\le\frac{1}{2}$ و منه : $|f'(c)|\le\frac{1}{2}$

و بالتالي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ |f(u_n)-f(\ln 2)|\le\frac{1}{2}|u_n-\ln 2|$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1}-\ln 2|\le\frac{1}{2}|u_n-\ln 2|}$$

■(III)②ج

لدينا حسب السؤال ب

$$(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1}-\ln 2|\le\frac{1}{2}|u_n-\ln 2|$$

$$\Leftrightarrow \quad |u_n-\ln 2|\le\frac{1}{2}|u_{n-1}-\ln 2|$$

$$\le\left(\frac{1}{2}\right)^2|u_{n-2}-\ln 2|$$

$$\le\left(\frac{1}{2}\right)^3|u_{n-3}-\ln 2|$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_{n-n}-\ln 2|$$

نستنتج إذن أن :

$$(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\ln 2|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|1-\ln 2|$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ محصور بين 1 و -1

إذن : $\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

و منه : $\lim_{n\infty}|u_n-\ln 2|=0$

يعني : $\lim_{n\infty}u_n=\ln 2$

و بالتالي : $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و تؤول إلى $\ln 2$.

■(IV)①أ

باستعمال البرهان بفصل الحالات نفصل بين حالتين :

<u>الحالة الأولى : إذا كان</u> $x>0$.

لدينا : $F(x)=\int_x^{2x}f(t)\,dt$

مع العلم أن f دالة تناقصية على $\mathbb{R}$ و ذلك حسب السؤال (II)③ب

ليكن : $x\le t\le 2x$

يعني : $f(x)\ge f(t)\ge f(2x)$

و منه : $\dfrac{x}{e^x-1} \ge \dfrac{t}{e^t-1} \ge \dfrac{2x}{e^{2x}-1}$

ندخل التكامل على هذا الترتيب نحصل على :

$$\int_x^{2x}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)dt \ge \int_x^{2x}\left(\frac{t}{e^t-1}\right)dt \ge \int_x^{2x}\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)dt$$

و منه : $\boxed{\left(\dfrac{x^2}{e^x-1}\right) \ge F(x) \ge \left(\dfrac{2x^2}{e^{2x}-1}\right)}$

<u>الحالة الثانية : إذا كان $x<0$.</u>

ليكن : $2x \le t \le x$

يعني : $f(2x) \ge f(t) \ge f(x)$

$$\int_{2x}^{x} f(2x)\,dt \ge \int_{2x}^{x} f(t)\,dt \ge \int_{2x}^{x} f(x)\,dt$$

$$-\int_{x}^{2x} f(2x)\,dt \ge -\int_{x}^{2x} f(t)\,dt \ge -\int_{x}^{2x} f(x)\,dt$$

$$-xf(2x) \ge -F(x) \ge -xf(x)$$

$$xf(2x) \le F(x) \le xf(x)$$

$$\boxed{\left(\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) \le F(x) \le \left(\frac{x^2}{e^x-1}\right)}$$

<u>خلاصة :</u> $\boxed{(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ \left(\dfrac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) \le F(x) \le \left(\dfrac{x^2}{e^x-1}\right)}$

■(IV)①ب

نعلم أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ \left(\dfrac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) \le F(x) \le \left(\dfrac{x^2}{e^x-1}\right)$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\dfrac{e^{2x}-e^0}{2x-0}}\right) = \left(\dfrac{0}{e^0}\right) = 0$

و لدينا كذلك: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{e^x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\dfrac{e^x-e^0}{x-0}}\right) = \left(\dfrac{0}{e^0}\right) = 0$

و بالتالي : $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 0 = F(0)$

أي F دالة متصلة في 0

■(IV)①ج

لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ \left(\dfrac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) \le F(x) \le \left(\dfrac{x^2}{e^x-1}\right)$

$$\Leftrightarrow\quad \underbrace{\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)}_{x\to 0\ \ \to\ 1} \le \frac{F(x)}{x} \le \underbrace{\left(\frac{x}{e^x-1}\right)}_{x\to 0\ \ \to\ 1}$$

و منه : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{F(x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}\right) = 1 = F'(0)$

■(IV)②أ

لدينا الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص على $[x,2x]$ مع $x\in\mathbb{R}^*$

إذن f تقبل دالة أصلية h بحيث : $F(x) = h(2x) - h(x)$

لدينا $x \to h(x)$ و $x \to 2x$ دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

إذن $x \to h(2x)$ دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

و لدينا : $F(x) = h(2x) - h(x)$

إذن : $F'(x) = 2h'(2x) - h'(x)$

$$\Leftrightarrow\quad F'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

$$\Leftrightarrow\quad F'(x) = 2\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right) - \left(\frac{x}{e^x-1}\right)$$

و بما أنك تلميذ من السنة الثانية بكالوريا علوم رياضية

فإنك تستطيع الوصول إلى النتيجة انطلاقا من التعبير أعلاه.

و منه : $\Leftrightarrow\quad \boxed{F'(x) = \left(\dfrac{3-e^x}{e^x+1}\right)f(x)}$

■(IV)②ب

لدينا حسب جدول إشارة f في السؤال(II)③ب

$$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x) > 0}$$

و ذلك لأن f متصلة و تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$ و قيمتها الدنوية هي : 0

إذن إشارة $F'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(3-e^x)$.

لأن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ e^x + 1 > 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات F كما يلي :

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$	
F	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$F(\ln 3)$	$\searrow$	0

■ و الحمد لله رب العالمين ■