

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

(C) sa courbe dans un R.O.N (O, \vec{i}, \vec{j})

1) a) montrer que le domaine de f est $D =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$

b) calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat

c) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (D) $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$

d) montrer que (D) $y = -x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à (C) en $-\infty$

2) montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x)}{x} = 0$

donner une interprétation géométrique du résultat

3) a) montrer que $(\forall x \in D - \{0\}) \quad f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2} \sqrt{\frac{x-1}{x^3}}$

b) dresser le tableau de variation de f

4) tracer la courbe (C)

Exercice 2

(I) 1) résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E) $11x - 17y = 1$

2) montrer que $4^6 \equiv 1 \pmod{13}$ et déduire que $13 \mid 1 + 2019^{2019}$

(II) Soit n un entier naturel.

On pose : $a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$

1) vérifier que $n-4 \mid a$ et $n-4 \mid b$

2) on considère les nombres $a' = 2n+1$; $b' = n+3$
soit d un diviseur commun de a' et b'

a) montrer que $a' \wedge b' = (n-2) \wedge 5$ en déduire les valeurs possible de d

b) déterminer n pour que $a' \wedge b' = 5$

3) montrer que $n \wedge (2n+1) = 1$

4) déterminer suivant n le pgcd de a et b

Exercice 3

Soit $(U_n)_n$ la suite réelle définie par : $U_0 = \frac{1}{4}$ et $U_{n+1} = (\sqrt{U_n} - U_n)^2$

1) a) calculer U_1 et montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < U_n < 1$

b) montrer que $(U_n)_n$ est décroissante

2) montrer que $\sum_{k=0}^{k=n} U_k = \frac{1}{2} - \sqrt{U_{n+1}}$

3) on considère la suite $(V_n)_n$ définie par : $V_0 = \sqrt{2}$ et $V_{n+1} = \frac{V_n}{\sqrt{1 + U_n V_n^2}}$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_n > 0$ puis étudier la monotonie de $(V_n)_n$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{V_{n+1}^2} - \frac{1}{V_n^2} = U_n$

c) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad V_n = \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{U_n}}}$