

Exercice 1 (10 pts)

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{3x^2 - x - 2}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x - 8}$	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{\sqrt{x+2} - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x-2} - 1}$
$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} \frac{4x+1}{4x^2-1}$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} \frac{x + \sqrt{x^2 - 25} - 5}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - \tan 2x}{x + 3 \sin x}$
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2 - 4}$	on pose $X = x - 2$		$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 1 - \cos x}{1 - \cos x \cos 2x}$

Exercice 2 (5 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} + x - 1 & ; \quad x \geq 1 \\ f(x) = \frac{6x^2 - 3 \sin(\pi x)}{4 - x^2} & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

1) comparer $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$ et $f(1)$ 0.5 pt

2) a) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ 1 pt

b) montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = -\frac{1}{2}$ 1 pt

3) calculer $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ 1 pt

4) a) montrer que $(\forall x \in]-\infty, -2[) \frac{6x^2 + 3}{4 - x^2} \leq f(x) \leq \frac{6x^2 - 3}{4 - x^2}$

b) en déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 0.5 pt

Exercice 3 (5 pts)

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{(1 + \sqrt{u_n})^2}$

1) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > 0$ 0.5 pt

b) étudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$ 0.5 pt

2) on pose $v_n = \frac{1}{\sqrt{u_n}}$ pour tout n de \mathbb{N}

a) montrer que $(v_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$

b) exprimer v_n en fonction de n

en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ 1 pt

3) on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$ pour tout entier naturel n

a) montrer que $(S_n)_n$ est décroissante 0.5 pt

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) u_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 1 pt

en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) S_n \leq 2$ 1 pt