

EXERCICE 1 : (2 pts)

1) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}} - \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$

2) Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \frac{1}{3} + (-1)^n \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

Montrer que : $\left| u_n - \frac{1}{3} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ et déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE 2 : (4 pts)

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 2$

2) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle est convergente

3) On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \frac{1}{u_n - 2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

a) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$

b) Calculer v_n en fonction de n et montrer que $u_n = \frac{3 + \frac{2}{3}n}{1 + \frac{1}{3}n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

c) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

EXERCICE 3 : (5 pts)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n + \frac{1}{6}$, $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 2$

- 0,5 1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > 1$.
- 1 2) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante et qu'elle est convergente
- 3) On pose $(\forall n \in \mathbb{N}) v_n = u_n - 1$
- 1 a) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{5}{6}$ et déterminer v_0
- 1,5 b) déduire que $u_n = 1 + \left(\frac{5}{6}\right)^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) et calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- 1 c) Calculer $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ (remarquer que $u_n = v_n + 1$)

EXERCICE 4 (9 pts)

1ere partie :

On considère la fonction numérique h définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = x^2 - 1 + 2 \ln(x)$$

- 1 1) Montrer que h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$
- 1 2) Calculer $h(1)$ et déduire que : $h(x) \leq 0$ ($\forall x \in]0, 1]$) et que :

$$h(x) \geq 0 \quad (\forall x \in [1, +\infty[)$$

2eme partie :

On considère la fonction f définie sur $I =]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) - \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat

2) a) Montrer que $(\forall x \in]0, +\infty[) f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$

b) Dédurre que f est strictement croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]0, 1]$.

c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et donner le tableau de variation de f

3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ et interpréter géométriquement le résultat

4) Tracer la courbe (C_f) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

5) Soit g la restriction de f à $[1, +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} , définie sur un intervalle J qu'on détermine

b) Calculer $g(e)$ et $(g^{-1})' \left(1 - \frac{1}{e^2} \right)$

c) Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j})