

Exercice : 1

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, on considère l'équation : (E)

$$z^2 + [(1-a)i - a]z + a + a^2 i = 0$$

1-a) Montrer que $\Delta = [(1+a)i - a]^2$

b) Recherche dans \mathbb{C} (E).

2 - Montrer que l'équation admet une seule solution $\Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}}$

3 - Supposons que $a \neq -1$; $a \neq -i$; $a \neq \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Soient $A(a)$, $B(ai)$, $C(a-i)$, $D(-i)$

a- Montrer que A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \arg a \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

b- Montrer que A, B, C et D sont cocycliques $\Leftrightarrow \arg a = \frac{\pi}{6} [\frac{2\pi}{3}] \wedge |a|=1$

4 - On pose $a = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Soit R la rotation de centre D telle que $R(C) = B$.

Déterminer l'angle de la rotation R .

Exercice : 2

on considère l'application : $F: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$
 $M(z) \mapsto M(z') / z' = (z+i)z - i$

1 - Montrer que F admet un seul point invariant A .

2 - Montrer que : $AM' = \sqrt{2} AM$ et $(\vec{AM}, \vec{AM}') \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

3 - Montrer que : AMM' est un triangle rectangle.

Exercice : 3

1 - Recherche dans \mathbb{C} : $(z-i)^5 = i(z+i)^5$

2 - Montrer que l'équation $z^2 - az + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, $a \in \mathbb{C}$ admet deux solutions z_1 et z_2 alors :

$$\arg z_2 + \arg z_1 \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\text{et } |z_1| \times |z_2| = 1$$