Lycée Ibn Zohr Tanger	Devoir libre 2 Semestre 1	P. Hicham ESSAFI 2022 /2021

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x-2\sqrt{x}+2$

(C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2) Etudier les branches infinies de la courbe (C_f)
3) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $(\Delta): y=x$
4) a) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0

   b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f

   d) Construire (Δ) et (C_f)

5) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

   a) Montrer par récurrence que, $u_n>1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

   b) Montrer que (u_n) est décroissante, en déduire qu'elle convergente.

   c) Calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3.
2) a) Démontrer que pour tout entier naturel $n\geq 4$, $u_n\geq 0$.

   b) En déduire que pour tout entier naturel $n\geq 5$, $u_n\geq n-3$.

   c) En déduire la limite de la suite (u_n).

3) On définit la suite (v_n) par : $v_n=-2u_n+3n-\frac{21}{2}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

   b) En déduire que : $u_n=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

   c) Soit la somme S_n définie par : $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

   Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.