التمرين الأول (3 نقط):

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(1,-1,-1)$ و $B(0,-2,1)$ و $C(1,-2,0)$

1) أ) بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$	0.75
ب) استنتج أن $x+y+z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)	0.5
2) لتكن (S) الفلكة التي معادلتها $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$	
بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(2,-1,1)$ و أن شعاعها هو $R=\sqrt{5}$	0.75
3) أ) أحسب $d(\Omega,(ABC))$ مسافة النقطة Ω عن المستوى (ABC)	0.5
ب) استنتج أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) (تحديد مركز وشعاع (Γ) غير مطلوب)	0.5

التمرين الثاني (3 نقط) :

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$	0.75
2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي هي : $a=1-i\sqrt{3}$ و $b=2+2i$ و $c=\sqrt{3}+i$ و $d=-2+2\sqrt{3}$	
أ) تحقق أن $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$	0.5
ب) استنتج أن النقط A و C و D مستقيمية .	0.25
3) ليكن z لحق نقطة M و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{-\pi}{3}$	
تحقق أن $z'=\frac{1}{2}az$	0.5
4) لتكن H صورة النقطة B بالدوران R ، و h لحقها ، و P النقطة التي لحقها p حيث $p=a-c$	
أ) تحقق أن $h=ip$	0.5
ب) بين أن المثلث OHP قائم الزاوية و متساوي الساقين في O	0.5

التمرين الثالث (3 نقط) :

يحتوي صندوق على عشر كرات : ثلاث كرات خضراء و ست كرات حمراء و كرة واحدة سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس .

نسحب عشوائيا و تآنيا ثلاث كرات من الصندوق .

نعتبر الأحداث التالية : A :" الحصول على ثلاث كرات خضراء "

و B : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

و C : " الحصول على كرتين على الأقل من نفس اللون "

1) بين أن : $p(A)=\frac{1}{120}$ و $p(B)=\frac{7}{40}$	2
2) أحسب $p(C)$	1

المسألة (11 نقطة) :

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

و (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 1cm)

0.5	1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا
0.25	2) أ) تحقق أن لكل x من المجال $]0,+\infty[$: $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$
0.5	ب) استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
0.5	ج) بين لكل x من المجال $]0,+\infty[$: $\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ ثم استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$
0.75	د) بين أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ اتجاهه المقارب المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$
0.5	3) أ) بين أن لكل x من $]0,1]$: $(x-1)+\ln x\le 0$ و أن لكل x من $[1,+\infty[$: $(x-1)+\ln x\ge 0$
1	ب) بين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$
0.5	ج) ضع جدول تغيرات الدالة f
0.5	4)أ) بين أن $f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$
0.5	ب) استنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج إحداثيتيها
0.5	5) أ) بين أن لكل x من $]0,+\infty[$ ، $f(x)-x=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$ و استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ)
1	ب) أنشئ (Δ) و (C) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$
0.5	6) أ) بين أن الدالة $H:x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto \ln x$ على المجال $]0,+\infty[$
0.75	ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$
0.5	ج) احسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$

الجزء الثاني :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $I\!N$

0.5	1) أ) بين بالترجع أن لكل n من $I\!N$ $1\le u_n\le e$
0.5	ب) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية
0.5	ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة
0.75	2) أحسب نهاية المتتالية (u_n)

تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2019
مادة الرياضيات
شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

التمرين الأول:

1-أ) لدينا $\overrightarrow{AB}(0-1\,;\,-2-(-1)\,;\,1-(-1))$

اذن $\overrightarrow{AB}(-1\,;\,-1\,;\,2)$

و $\overrightarrow{AC}(1-1\,;\,-2-(-1)\,;\,0-(-1))$

اذن $\overrightarrow{AC}(0\,;\,-1\,;\,1)$

اذن:

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-1\times1-(-1)\times2)\vec{i}-(-1\times1-0\times2)\vec{j}+(-1\times(-1)-0\times(-1))\vec{k}$$

$$=1\vec{i}+1\vec{j}+1\vec{k}$$

$$=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

ب- الطريقة الأولى:

نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC)

اذن المستوى (ABC) له معادلة ديكارتية تكتب على الشكل: $1x+1y+1z+d=0$

ولدينا $x_A+y_A+z_A+d=0$

$1-1-1+d=0$

$d=1$

اذن $(ABC): x+y+z+1=0$

الطريقة الثانية:

المستوى (ABC) هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}=0$

$(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}=0 \iff 1(x-1)+1(y+1)+1(z+1)=0$

$\iff x-1+y+1+z+1=0$

$\iff x+y+z+1=0$

اذن $x+y+z+1=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

2) الطريقة الأولى

لدينا (S) فلكة معادلتها:

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$$

ولدينا $x^2-4x=(x-2)^2-4$

$y^2+2y=(y+1)^2-1$

$z^2-2z=(z-1)^2-1$

اذن $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$

$\iff (x-2)^2-4+(y+1)^2-1+(z-1)^2-1+1=0$

$\iff (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=5$

اذن مركز الفلكة هو النقطة: $\Omega(2;-1;1)$

وشعاعها $R=\sqrt{5}$

الطريقة الثانية:

لدينا (S) فلكة معادلتها:

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$$

اذن مركز (S) هو: $\Omega\left(-\frac{(-4)}{2};\frac{-2}{2};-\frac{(-2)}{2}\right)$

اي $\Omega(2;-1;1)$

وشعاع (S) هو: $R=\frac{\sqrt{(-4)^2+2^2+(-2)^2-4\times1}}{2}$

$=\frac{\sqrt{20}}{2}=2\sqrt{5}$

أ-3) $d(\Omega;(ABC)) = \frac{|x_\Omega+y_\Omega+z_\Omega+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$

$= \frac{|2-1+1+1|}{\sqrt3}$

$= \frac{3}{\sqrt3} = \sqrt3$

ب- لدينا $d(\Omega;(ABC))<R$

لأنه $d(\Omega;(ABC))=\sqrt3$

و $R=\sqrt5$

إذن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ).

التمرين الثاني.

1) نعتبر المعادلة: $z^2-2z+4=0$

$\Delta=(-2)^2-4\times1\times4$

$=4-16$

$=-12$

لدينا $\Delta<0$ إذن المعادلة $z^2-2z+4=0$ تقبل حلين عقديين مترافقين:

$z_1=\frac{2+\sqrt{12}\,i}{2\times1}$

$=\frac{2+2\sqrt3\,i}{2}$

$=\frac{2(1+\sqrt3\,i)}{2}$

$=1+\sqrt3\,i$

$z_2=\overline{z_1}=\overline{1+\sqrt3\,i}=1-\sqrt3\,i$

إذن $S=\{1+\sqrt3\,i;1-\sqrt3\,i\}$

2-أ) الطريقة الأولى:

$a-d=1-i\sqrt3-(-2+2\sqrt3)$

$a-d=1-i\sqrt3+2-2\sqrt3$

$=3-2\sqrt3-i\sqrt3$

$=-\sqrt3(-\sqrt3+2+i)$

$=-\sqrt3(\sqrt3-\sqrt3-\sqrt3+2+i)$

$=-\sqrt3(\sqrt3+i-2\sqrt3+2)$

$=-\sqrt3(\sqrt3+i-(2\sqrt3-2))$

$=-\sqrt3(c-d)$

الطريقة الثانية:

$-\sqrt3(c-d)=-\sqrt3(\sqrt3+i-(-2+2\sqrt3))$

$=-\sqrt3(\sqrt3+i+2-2\sqrt3)$

$=-\sqrt3(2-\sqrt3+i)$

$=-2\sqrt3+3-\sqrt3\,i$

$=-2\sqrt3+1+2-\sqrt3\,i$

$=1-\sqrt3\,i-(2\sqrt3-2)$

$=a-d$

ب- لدينا $a-d=-\sqrt3(c-d)$

$\frac{a-d}{c-d}=-\sqrt3$

بما أن $\frac{a-d}{c-d}\in\mathbb{R}$

فإن النقط A و C و D مستقيمية

ويمكن إضافة:

لدينا $\frac{a-d}{c-d}=-\sqrt3$

إذن $\arg\left(\frac{a-d}{c-d}\right)=\pi\,[2\pi]$

أي أن $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA})=\pi\,[2\pi]$

إذن $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DC}$ متجهتين مستقيميتين

ومنه النقط A و C و D مستقيمية

③ لدينا $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

يعني أنه: $\begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

" " $\begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

$\begin{cases} \left|\frac{z'}{z}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

$\frac{z'}{z} = [1; -\frac{\pi}{3}]$

$z' = \left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right) z$

$z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z$

$= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i) z$

$= \frac{1}{2} a z$

ويمكن الإجابة على الشكل الآتي:

$R(M) = M' \iff z' = e^{i(-\frac{\pi}{3})}(z - z_O) + z_O$

$\iff z' = \left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right) z$

$\iff z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z$

$\iff z' = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i) z$

$\iff z' = \frac{1}{2} a z$

4) 1- لدينا $H(h)$ صورة النقطة $B(b)$ بالدوران R.

إذن $h = \frac{1}{2} ab$

$= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)(2 + 2i)$

$= \frac{1}{2}(2 + 2i - 2\sqrt{3}i - 2\sqrt{3}i^2)$

$h = \frac{1}{2}(2 + 2i - 2\sqrt{3}i + 2\sqrt{3})$

$= \frac{1}{2} \times 2(1 + i - \sqrt{3}i + \sqrt{3})$

$= 1 + i - \sqrt{3}i + \sqrt{3}$

$= i\left(\frac{1}{i} + 1 - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{i}\right)$

$= i(-i + 1 - \sqrt{3} - \sqrt{3}i)$

$= i(1 - \sqrt{3}i - (\sqrt{3} + i))$

$= i(a - c)$

$= ip$

ب- لدينا $h = ip$

يعني أن $\frac{h}{p} = i$

تكافئ $\frac{h}{p} = [1; \frac{\pi}{2}]$

" $\begin{cases} \left|\frac{h}{p}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{h}{p}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

" $\begin{cases} |h| = |p| \\ \arg\left(\frac{h}{p}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

" $\begin{cases} |h - z_O| = |p - z_O| \\ \arg\left(\frac{h - z_O}{p - z_O}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

" $\begin{cases} OH = OP \\ (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

إذن المثلث OHP قائم الزاوية ومتساوي الساقين في O.

التمرين الثالث :

3	V
6	R
1	N

1) عدد الكرات داخل الصندوق هو 10

بما أننا نسحب ثلاث كرات تآنيا

فإن $card(\Omega) = C_{10}^{3}$

$= \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}$

$= 120$

A : "الحصول على ثلاث كرات خضراء"

VVV

$card(A) = C_{3}^{3}$

$= 1$

$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$

$= \frac{1}{120}$

B : "الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون"

RRR أو VVV.

$card(B) = C_{3}^{3} + C_{6}^{3}$

$= 1 + \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}$

$= 1 + 20$

$= 21$

$p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)}$

$= \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$

2) الطريقة الأولى.

C : "الحصول على كرتين على الأقل من نفس اللون"

RRR أو VVV أو $RR\bar{R}$ أو $VV\bar{V}$

$card(C) = C_{3}^{2}\times C_{7}^{1} + C_{6}^{2}\times C_{4}^{1} + C_{3}^{3} + C_{6}^{3}$

$= \frac{3\times2}{2\times1}\times7 + \frac{6\times5}{2\times1}\times4 + 1 + 20$

$= 3\times7 + 15\times4 + 1 + 20$

$= 21 + 60 + 1 + 20$

$= 102$

$p(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)}$

$= \frac{102}{120}$

$= \frac{17}{20}$

الطريقة الثانية :

الحدث المضاد لـ C.

$\bar{C}$: "الحصول على كرة من كل لون"

أو $\bar{C}$: " الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون مثنى مثنى"

NVR

$p(\bar{C}) = \frac{card(\bar{C})}{card(\Omega)}$

$= \frac{C_{1}^{1}\times C_{3}^{1}\times C_{6}^{1}}{120}$

$= \frac{1\times3\times6}{120}$

$= \frac{18}{120} = \frac{3}{20}$

$p(C) = 1 - p(\bar{C})$

$= 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$

المسألة: الجزء الأول

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

$=0+\frac{1}{2}-(-\infty)+\frac{1}{2}(+\infty)$

$=\frac{1}{2}+\infty+\infty$

$=+\infty$

لأن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x=-\infty$

و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} (\ln x)^2=+\infty$

إذن (C) يقبل مقاربا عموديا هو المستقيم الذي معادلته $x=0$.

2.أ- لكل x من $]0;+\infty[$

$f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\ln x)^2-\ln x$

$=x+\frac{1}{2}+\ln x\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)$

لأن $(\ln x)^2=\ln x\times\ln x$

أو $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

$=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}\ln x\times\ln x$

$=x+\frac{1}{2}+\ln x\left(-1+\frac{1}{2}\ln x\right)$

$=x+\frac{1}{2}+\ln x\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)$

ب-

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\frac{1}{2}+\ln x\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)$

$=+\infty+\frac{1}{2}+\infty(+\infty-1)$

$=+\infty+\frac{1}{2}+\infty\times(+\infty)$

$=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$

ج- لكل x من $]0;+\infty[$:

$\frac{(\ln x)^2}{x}=\frac{(\ln\sqrt{x}^2)^2}{\sqrt{x}^2}$

$=\left(\frac{\ln\sqrt{x}^2}{\sqrt{x}}\right)^2$

$=\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

$=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

نضع $t=\sqrt{x}$ $\quad x\to+\infty \Leftrightarrow t\to+\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2$

$=4\times 0^2=0$

د- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{2}}{x}-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{x}$

$=1-0+\frac{1}{2}\times 0$

$=1$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x-x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$$

$$= \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}(+\infty)-1\right)(+\infty)$$

$$= +\infty$$

إذن (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ اتجاهه المقارب المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$

3) أ- لدينا

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

و

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	$\|$	$-$	0	$+$	

إذن لكل x من $]0;1]$:

$x-1\leq 0$ و $\ln x\leq 0$

$\Rightarrow x-1+\ln x\leq 0$

و لكل x من $[1;+\infty[$

$x-1\geq 0$ و $\ln x\geq 0$

$\Rightarrow x-1+\ln x\geq 0$

ب- لكل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \left(x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)'$$

$$= (x)'+\left(\frac{1}{2}\right)'-(\ln x)'+\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)'$$

$$= 1+0-\frac{1}{x}+\frac{2}{2}(\ln x)'\ln x$$

$$f'(x) = 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\times\ln x$$

$$= 1-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$$

$$= \frac{x-1+\ln x}{x}$$

ج- لدينا $\forall x\in]0;+\infty[: x>0$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x-1+\ln x$ على $]0;+\infty[$.

و باستثمار نتيجة السؤال السابق

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
f	$\| +\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(1) = 1+\frac{1}{2}-\ln 1+\frac{1}{2}(\ln 1)^2 = \frac{3}{2}$$

4) أ- لدينا لكل x من $]0;+\infty[$:

$$f''(x) = \left(\frac{x-1+\ln x}{x}\right)'$$

$$= \frac{(x-1+\ln x)'x-(x-1+\ln x)(x)'}{x^2}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x-(x-1+\ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{x+1-x+1-\ln x}{x^2}$$

$$= \frac{2-\ln x}{x^2}$$

ب- لدينا $\forall x\in]0;+\infty[: x^2>0$

إذن اشارة $f''(x)$ هي اشارة $2-\ln x$ على $]0;+\infty[$

$2-\ln x\geq 0 \iff 2\geq \ln x \iff e^2\geq x$ | $2-\ln x\leq 0 \iff 2\leq \ln x \iff e^2\leq x$

إذن

x	0		e^2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

لدينا $f''(e^2)=0$ و f'' تتغير إشارتها بجوار e^2

إذن (C) يقبل نقطة انعطاف أفصولها e^2

ولدينا $f(e^2)=e^2+\frac{1}{2}-\ln e^2+\frac{1}{2}(\ln e^2)$

$=e^2+\frac{1}{2}-2+2$

$=e^2+\frac{1}{2}$

النقطة $A(e^2;e^2+\frac{1}{2})$ هي نقطة انعطاف لـ (C).

3) أ- لكل x من $]0;+\infty[$:

$f(x)-x=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2-x$

$=\frac{1}{2}(1-2\ln x+(\ln x)^2)$

$=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$

لدينا $\forall x\in]0;+\infty[:(\ln x-1)^2\geq 0$

إذن لكل x من $]0;+\infty[$: $f(x)-x\geq 0$

ومنه (C) يوجد فوق (Δ) على $]0;+\infty[$.

6) أ- لدينا لكل x من $]0;+\infty[$:

$H'(x)=(x\ln x-x)'$

$=(x)'\ln x+x(\ln x)'-(x)'$

$=\ln x+x\times\frac{1}{x}-1$

$=\ln x+1-1$

$H'(x)=\ln x$

$=h(x)$

إذن H دالة أصلية لـ h على $]0;+\infty[$

ب- لنحسب التكامل $\int_1^e(\ln x)^2dx$ باستعمال تقنية المكاملة بالأجزاء

نضع:

$$\begin{cases}u(x)=x\\ v'(x)=2(\ln x)'\ln x\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}u'(x)=1\\ v(x)=(\ln x)^2\end{cases}$$

$=2\times\frac{1}{x}\ln x$

$=2\frac{\ln x}{x}$

$$\int_1^e(\ln x)^2dx=\left[x(\ln x)^2\right]_1^e-\int_1^e x\times 2\frac{\ln x}{x}dx$$

$=e(\ln e)^2-1(\ln 1)^2-2\int_1^e\ln x\,dx$

$=e-2\left[x\ln x-x\right]_1^e$

$=e-2(e\ln e-e-(1\ln 1-1))$

$=e-2(e-e+1)$

$=e-2$

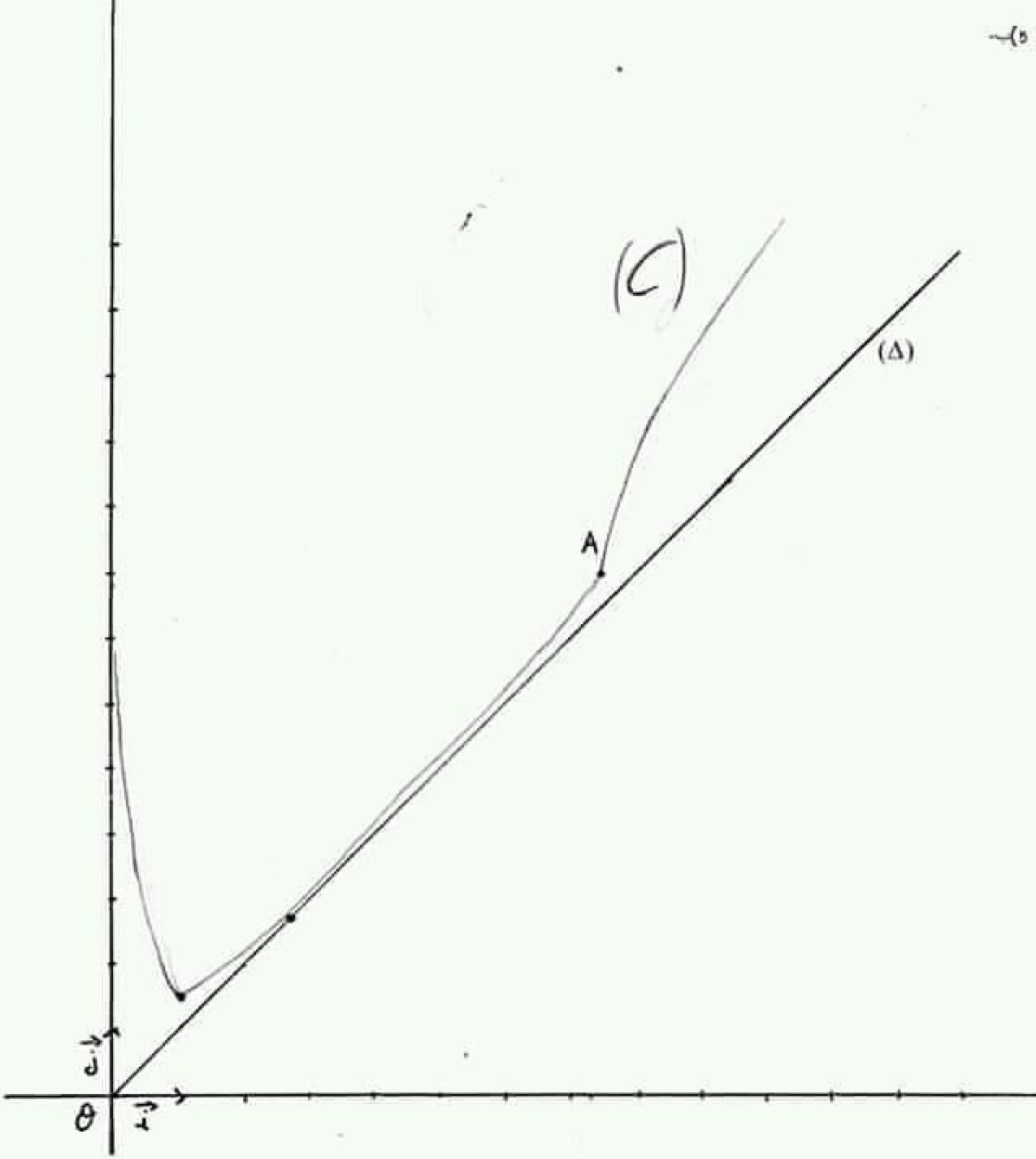
ج- مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و(Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$:

$A=\int_1^e|f(x)-x|dx\ (u.a)$

وبما أن $\forall x\in]0;+\infty[:f(x)-x\geq 0$

فإن $A=\int_1^e(f(x)-x)dx\ (u.a)$

لنحسب التكامل $\int_1^e(f(x)-x)dx$



$e^2 \simeq 7{,}38$

$e^2 + \frac{1}{2} \simeq 7{,}88$

$$f(e) = e + \frac{1}{2} - \ln e + \frac{1}{2}(\ln e)^2$$
$$= e + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}$$
$$= e$$

$\int_1^e (f(x)-x)\,dx = \int_1^e \frac{1}{2}(\ln x-1)^2\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_1^e\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 1\right)dx$

$= \frac{1}{2}\left(\int_1^e(\ln x)^2dx - 2\int_1^e \ln x\,dx + \int_1^e dx\right)$

$= \frac{1}{2}\int_1^e(\ln x)^2dx - \int_1^e \ln x\,dx + \frac{1}{2}\int_1^e dx$

$= \frac{1}{2}(e-2) - [x\ln x - x]_1^e + \frac{1}{2}[x]_1^e$

$= \frac{1}{2}(e-2) - (e\ln e - e - (1\ln 1 - 1)) + \frac{1}{2}(e-1)$

$= \frac{1}{2}(e-2) - (\cancel{e}-\cancel{e}+1) + \frac{1}{2}(e-1)$

$= \frac{1}{2}(e-2+e-1) - 1$

$= \frac{1}{2}(2e-3) - 1$

$= \frac{1}{2}(2e-3-2)$

$= \frac{1}{2}(2e-5)$

إذن $A = \frac{1}{2}(e-5)\ cm^2$

الجزء الثاني:

1)- أ-

من أجل $n=0$: لدينا $u_0 = 1$

إذن $1 \le u_0 \le e$

العبارة صحيحة من أجل $n=0$.

ليكن n من $\mathbb{N}$.

نفترض أن $1 \le u_n \le e$

لنبين أن $1 \le u_{n+1} \le e$

لدينا f دالة تزايدية على $[1;e]$

و $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2 \ ; \ x \mapsto -\ln x \ ; \ x \mapsto x+\frac{1}{2}$

دوال متصلة على المجال $[1;e]$

إذن f متصلة على $[1;e]$

لأنها مجموع دوال متصلة

بما أن f دالة متصلة و تزايدية على $[1;e]$

فإن:

$1 \le u_n \le e \Rightarrow f(1) \le f(u_n) \le f(e)$

$\Rightarrow \frac{3}{2} \le u_{n+1} \le e$

$\Rightarrow 1 \le u_{n+1} \le e$

إذن حسب مبدأ الترجع:

$\forall n\in\mathbb{N} : 1 \le u_n \le e$

ب- الطريقة الأولى:

لدينا لكل n من $\mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

ولدينا $\forall x\in[1;e] : f(x)-x \ge 0$

و $\forall n\in\mathbb{N} : 1 \le u_n \le e$

إذن لكل n من $\mathbb{N}$:

$f(u_n) - u_n \ge 0$

أي أن $u_{n+1} - u_n \ge 0$

$u_{n+1} \ge u_n$

وبالتالي (u_n) متتالية تزايدية .

الطريقة الثانية .

(u_n) متتالية تزايدية يعني أن:

$\forall n\in\mathbb{N} : u_{n+1} \ge u_n$

من أجل $n=0$:

لدينا $u_0 = 1$

و $u_1 = f(u_0)$

$= f(1)$

$= \frac{3}{2}$

إذن $u_1 \geq u_0$ لأن $\frac{3}{2} > 1$

العبارة صحيحة من أجل $n=0$.

ليكن n من $\mathbb{N}$.

نفترض أن $u_{n+1} \geq u_n$

لنبين أن $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

لدينا f دالة متصلة وتزايدية على $[1;e]$

و $\forall n \in \mathbb{N}: 1 \leq u_n \leq e$

إذن $u_{n+1} \geq u_n \Rightarrow f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$

$\Rightarrow u_{n+2} \geq u_{n+1}$

إذن حسب مبدأ التراجع:

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad u_{n+1} \geq u_n$

ومنه (u_n) متتالية تزايدية.

ج) لدينا (u_n) متتالية تزايدية ومكبورة

$(\forall n \in \mathbb{N}: \ u_n \leq e)$

إذن (u_n) متتالية متقاربة

2) لدينا f دالة متصلة على المجال $[1;e]$

و $f([1;e]) \subset [1;e]$

لأن $f([1;e]) = [f(1); f(e)]$

$= [\frac{3}{2}; e]$

ولدينا $u_0 \in [1;e]$ $(u_0 = 1)$

و (u_n) متتالية متقاربة.

إذن نهاية المتتالية (u_n) هي العدد الحقيقي ℓ حيث ℓ حل للمعادلة

$f(\ell) = \ell$.

$$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow f(\ell) - \ell = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\ln \ell - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln \ell - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln \ell - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln \ell = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln \ell} = e^1$$

$$\Leftrightarrow \ell = e$$

إذن

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = e.$$