الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2018
-الموضوع-

NS22

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها	المعامل	7

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة .

مكونات الموضوع

يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين و مسألة، مستقلة فيما بينها، و تتوزع حسب المجالات كما يلي:

التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الثالث	حساب الاحتمالات	3 نقط
المسألة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل و المتتاليات العددية	11 نقطة

التمرين الأول (3 نقط):

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط $A(0,-2,-2)$ و $B(1,-2,-4)$ و $C(-3,-1,2)$

1 — **1)** بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ ثم استنتج أن $2x+2y+z+6=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

2) لتكن (S) الفلكة التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$

0.5 — تحقق من أن مركز الفلكة (S) هو $\Omega(1,0,1)$ و أن شعاعها هو $R=5$

0.25 — **3)** أ- تحقق من أن $\begin{cases}x=1+2t\\ y=2t\\ z=1+t\end{cases}\;;(t\in\mathbb{R})$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على المستوى (ABC)

0.5 — ب- حدد إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC)

0.75 — **4)** تحقق من أن $d(\Omega,(ABC))=3$ ثم بين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة شعاعها 4 يتم تحديد مركزها.

التمرين الثاني (3 نقط) :

0.75 — **1)** حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $2z^2+2z+5=0$

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$

0.25 — أ - أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $d=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ب – لتكن النقطة A التي لحقها $a=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ و B صورة النقطة A بالدوران R

0.5 — ليكن b لحق النقطة B، بين أن $b=d.a$

3) لتكن t الإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ و النقطة C صورة B بالإزاحة t و c لحق النقطة C

0.75 — أ - تحقق من أن $c=b+a$ ثم استنتج أن $c=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ (يمكنك استعمال السؤال (2 ب-)

0.75 — ب - حدد $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ ثم استنتج أن المثلث OAC متساوي الأضلاع .

التمرين الثالث (3 نقط) :

يحتوي صندوق على 9 كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس : <u>خمس كرات حمراء</u> تحمل الأعداد 2 ; 2 ; 2 ; 1 ; 1

و <u>أربع كرات بيضاء</u> تحمل الأعداد 2 ; 2 ; 2 ; 1

نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و تآنيا 3 كرات من الصندوق .

لتكن الأحداث : A : "الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون " و B : "الكرات الثلاث المسحوبة تحمل نفس العدد "

و C : "الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون و تحمل نفس العدد "

1.5 — **1)** بين أن : $p(A)=\frac{1}{6}$ و $p(B)=\frac{1}{4}$ و $p(C)=\frac{1}{42}$

2) نعيد التجربة السابقة 3 مرات مع إعادة الكرات الثلاث المسحوبة إلى الصندوق بعد كل سحبة، و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A

0.5 — أ- حدد وسيطي المتغير العشوائي الحداني X

1 — ب- بين أن : $p(X=1)=\frac{25}{72}$ و احسب $p(X=2)$

المسألة (11 نقطة) :	
I - لتكن g الدالة العددية المعرفة على IR كما يلي : $g(x)=e^{x}-x^{2}+3x-1$	
الجدول جانبه يمثل جدول تغيرات الدالة g	
1) تحقق من أن $g(0)=0$	0.25
2) حدد إشارة $g(x)$ على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[0,+\infty[$	0.5
II– لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي:	
$f(x)=(x^{2}-x)\,e^{-x}+x$	
و (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 1cm)	
1) أ- تحقق من أن $f(x)=\dfrac{x^{2}}{e^{x}}-\dfrac{x}{e^{x}}+x$ لكل x من IR ثم بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	0.5
ب – احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$ ثم استنتج أن المنحنى (C) يقبل مقاربا (D) بجوار $+\infty$ معادلته $y=x$	0.75
ج – تحقق من أن $f(x)=\dfrac{x^{2}-x+xe^{x}}{e^{x}}$ لكل x من IR ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	0.5
د – بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ ثم أول النتيجة هندسيا.	0.5
2) أ – تحقق من أن $f(x)-x$ و $x^{2}-x$ لهما نفس الإشارة لكل x من IR	0.25
ب – استنتج أن (C) يوجد فوق (D) على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[1,+\infty[$ و تحت (D) على المجال $[0,1]$	0.5
3) أ - بين أنه لكل x من IR لدينا $f'(x)=g(x)\,e^{-x}$	0.75
ب – استنتنج أن الدالة f تناقصية على $]-\infty,0]$ و تزايدية على $[0,+\infty[$	0.5
ج – ضع جدول تغيرات الدالة f	0.25
4)أ- تحقق من أن $f''(x)=(x^{2}-5x+4)e^{-x}$ لكل x من IR	0.25
ب- استنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما على التوالي هما 1 و 4	0.5
5) أنشئ (D) و (C) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ $f(4)\approx 4.2$)	1
6) أ – بين أن الدالة $H:x\mapsto(x^{2}+2x+2)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto -x^{2}e^{-x}$ على IR	0.5
ثم استنتج أن $\displaystyle\int_{0}^{1}x^{2}e^{-x}dx=\frac{2e-5}{e}$	
ب – باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\displaystyle\int_{0}^{1}xe^{-x}dx=\frac{e-2}{e}$	0.75
ج – احسب ب cm^{2} مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (D) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$	0.75
III – لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0=\dfrac{1}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$	
1) بين أن $0\le u_n\le 1$ لكل n من $\mathbb{N}$ (*يمكن استعمال نتيجة السؤال II– 3) ب-*)	0.75
2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية .	0.5
3) استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.	0.75

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

تصحيح التمرين الأول :

1)

✓ لدينا $\overrightarrow{AB}(1,0,-2)$ و $\overrightarrow{AC}(-3,1,4)$

إذن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & -2\\ 1 & 4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$

و منه : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

✓ لدينا : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : $(2)x+(2)y+(1)z+d=0$

و بما أن $A(0,-2,-2)\in(ABC)$ فإن $(2)(0)+(2)(-2)+(1)(-2)+d=0$ أي $d=6$

وبالتالي : $2x+2y+z+6=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

2)

$M(x,y,z)\in(S) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+z^2-2z=23$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+z^2-2z+1=23+1+1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=25$

$\Leftrightarrow (x-(1))^2+(y-(0))^2+(z-(1))^2=(5)^2$

إذن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,0,1)$ و أن شعاعها هو $R=5$

3) أ-

لنحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من $\Omega(1,0,1)$ و العمودي على المستوى (ABC)

بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) و بما أن (Δ) عمودي على المستوى (ABC)

فإن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ هي متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

و لدينا $\Omega(1,0,1)\in(\Delta)$

إذن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) هو : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=(1)+t(2)\\ y=(0)+t(2)\\ z=1+t(1)\end{cases}$

أي : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

ب-

$$\begin{cases} x_H = 1+2t \\ y_H = 2t \\ z_H = 1+t \\ 2x_H + 2y_H + z_H + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow H(x_H, y_H, z_H) \in (\Delta) \cap (ABC)$$

$$\begin{cases} x_H = 1+2t \\ y_H - 1+2t \\ z_H = t \\ 2(1+2t) + 2(2t) + (1+t) + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_H = 1+2t \\ y_H = 2t \\ z_H = 1+t \\ t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_H = -1 \\ y_H = -2 \\ z_H = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(4

✓ لدينا : $d(\Omega,(ABC)) = \dfrac{|2(1)+2(0)+(1)+6|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{9}} = \dfrac{9}{3} = 3$

بما أن $d(\Omega,(ABC)) < R$ ($R = 5$ شعاع الفلكة (S))

فإن : المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة شعاعها :

$$r = \sqrt{R^2 - (d(\Omega,(ABC)))^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

و مركزها (هو المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (ABC)) نقطة تقاطع (Δ) و (ABC)

أي النقطة $H(-1,-2,0)$

تصحيح التمرين الثاني :

1) لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $2z^2+2z+5=0$

لدينا : $\Delta=(2)^2-4(2)(5)=-36$

بما أن $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$$z=\frac{-(2)-i\sqrt{36}}{2(2)} \quad \text{أو} \quad z=\frac{-(2)+i\sqrt{36}}{2(2)}$$

$$z=\frac{-2-6i}{4} \quad \text{أو} \quad z=\frac{-2+6i}{4}$$

$$z=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i \quad \text{أو} \quad z=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

إذن : $S=\left\{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right\}$

2) أ- لنكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي : $d=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

لدينا : $d=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

إذن : $d=1.\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

ب- لدينا : R هو الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$

إذن الكتابة العقدية للدوران R هي : $z'-0=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-0)$ أي : $\boxed{z'=d.z}$

بما أن $B(b)$ صورة النقطة $A(a)$ بالدوران R

فإن : $b=d.a$

3) أ-

✓ لدينا : t الإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$

إذن الكتابة العقدية للإزاحة t هي : $z'=z+z_{\overrightarrow{OA}}=z+a-0$ أي : $\boxed{z'=z+a}$

بما أن $C(c)$ صورة النقطة $B(b)$ بالإزاحة t

فإن : $c=b+a$

✓ $c=b+a=a\left(\frac{b}{a}+1\right)=a(d+1)=a\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1\right)=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

(حسب السؤال 2) ب- لدينا : $b=d.a$ إذن $\frac{b}{a}=d$)

ب-

✓ لدينا $c=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ إذن $\frac{c}{a}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

إذن $\arg\left(\frac{c}{a}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

✓ لدينا : $\left|\frac{c}{a}\right|=\left|\frac{c-0}{a-0}\right|=1$ إذن $\frac{OC}{OA}=1$ و منه $\boxed{OC=OA}$

و لدينا : $\arg\left(\frac{c}{a}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ إذن $\arg\left(\frac{c-0}{a-0}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ و منه $\boxed{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]}$

و بالتالي : المثلث OAC متساوي الأضلاع .

تصحيح التمرين الثالث :

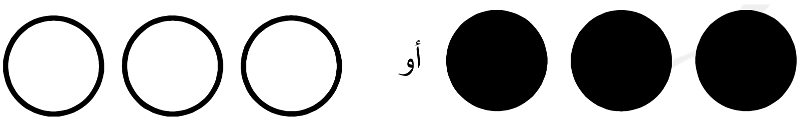
1) التجربة : " نسحب عشوائيا و تآنيا 3 كرات من الصندوق"

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

$$card\Omega=C_9^3=84$$

✓

A :"الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون"

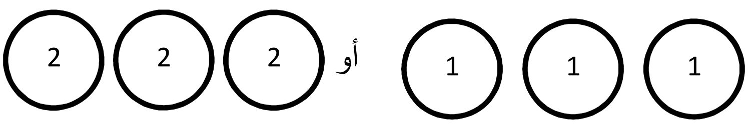


$$cardA=C_4^3+C_5^3=4+10=14$$

$$p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{14}{84}=\frac{1}{6}$$

✓

B :"الكرات الثلاث المسحوبة تحمل نفس العدد "



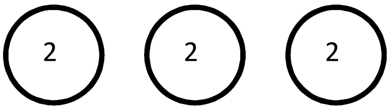
$$cardB=C_3^3+C_6^3=1+20=21$$

$$p(B)=\frac{cardB}{card\Omega}=\frac{21}{84}=\frac{1}{4}$$

✓

C :"الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون و تحمل نفس العدد"

أو



$$cardC = C_3^3 + C_3^3 = 1+1 = 2$$

$$p(C) = \frac{cardC}{card\Omega} = \frac{2}{84} = \frac{1}{42}$$

2) نكرر التجربة السابقة 3 مرات مع إعادة الكرات الثلاث المسحوبة إلى الصندوق بعد كل سحبة ، و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A

أ- لدينا X متغير عشوائي حداني وسيطاه n و p

حيث : n هو عدد مرات تكرار التجربة أي $n=3$

و p هو احتمال تحقق الحدث A أي : $p = p(A) = \frac{1}{6}$

ب- $$p(X=1) = C_3^1\left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-1} = 3\times\frac{1}{6}\times\frac{25}{36} = \frac{25}{72}$$

$$p(X=2) = C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-2} = 3\times\frac{1}{36}\times\frac{5}{6} = \frac{5}{72}$$

تصحيح المسألة :

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$

1) $g(0) = e^0 - 0^2 + 3(0) - 1 = 1 - 0 + 0 - 1 = 0$

2)

✓ <u>على المجال $]-\infty,0]$:</u>

لدينا $x \leq 0$ و انطلاقا من جدول تغيرات الدالة g لدينا : g تزايدية

إذن : $g(x) \leq g(0)$ و منه $g(x) \leq 0$

✓ <u>على المجال $[0,+\infty[$:</u>

لدينا $x \geq 0$ و انطلاقا من جدول تغيرات الدالة g لدينا : g تزايدية

إذن : $g(x) \geq g(0)$ و منه $g(x) \geq 0$

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=(x^2-x)e^{-x}+x$

1) أ-

✓ ليكن $x\in\mathbb{R}$:

لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-x)e^{-x}+x \\ &= (x^2-x)\times\frac{1}{e^x}+x \\ &= \frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x \end{aligned}$$

إذن $f(x)=\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x$ لكل x من $\mathbb{R}$

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x=+\infty$

لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0^+ \quad \left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty\right) \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0^+ \quad \left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\right) \\ \lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty \end{cases}$

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}=0$

إذن : المنحنى (C) يقبل مقاربا مائلا (D) بجوار $+\infty$ معادلته $y=x$

ج-

✓ ليكن $x\in\mathbb{R}$:

لدينا : $f(x)=\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x=\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}$

إذن : $f(x)=\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}$ لكل x من $\mathbb{R}$

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}\times(x^2-x+xe^x)=+\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2-x=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0^-$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x+xe^x)=+\infty$

و : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$

د-

✓ $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+xe^x}{xe^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^x}\times(x^2-x+xe^x)=-\infty$

: $\lim_{x\to-\infty}x^2-x=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$; $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0^-$ $\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(x^2-x+xe^x)=+\infty$

و : $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0^-$

✓ لدينا : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

إذن : المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$

2) أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$:

لدينا : $f(x)-x=(x^2-x)e^{-x}$

بما أن $e^{-x}>0$

فإن $f(x)-x$ و x^2-x لهما نفس الإشارة لكل x من $\mathbb{R}$

ب- لدينا : $f(x)-x$ و x^2-x لهما نفس الإشارة لكل x من $\mathbb{R}$

لندرس إشارة x^2-x :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x2-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

✓ على المجالين $]-\infty,0]$ و $[1,+\infty[$:

لدينا $x^2-x\geq 0$

إذن $f(x)-x\geq 0$

و منه (C) يوجد فوق (D)

✓ على المجال $[0,1]$:

لدينا $x^2-x\leq 0$

إذن $f(x)-x\leq 0$

و منه (C) يوجد تحت (D)

3) أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(x^2-x\right)e^{-x}+x\right)' \\ &= \left(x^2-x\right)'e^{-x}+\left(x^2-x\right)\left(e^{-x}\right)'+1 \\ &= (2x-1)e^{-x}-\left(x^2-x\right)e^{-x}+1 \\ &= e^{-x}\left(2x-1-x^2+x+e^x\right) \\ &= e^{-x}\left(e^x-x^2+3x-1\right) \\ &= e^{-x}g(x) \end{aligned}$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=g(x)e^{-x}$

ب- لدينا لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=g(x)e^{-x}$ و نعلم أن لكل x من $\mathbb{R}$ $e^{-x}>0$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

✓ على المجال $]-\infty,0]$:

لدينا $g(x)\leq 0$ إذن $f'(x)\leq 0$

و منه الدالة f تناقصية على $]-\infty,0]$

✓ على المجال $[0,+\infty[$:

لدينا $g(x)\geq 0$ إذن $f'(x)\geq 0$

و منه الدالة f تزايدية على $[0,+\infty[$

ج- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(4 أ- لدينا : f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(e^{-x}g(x)\right)' \\ &= \left(e^{-x}\right)'\times g(x)+e^{-x}\times g'(x) \\ &= -e^{-x}\left(e^{x}-x^{2}+3x-1\right)+e^{-x}\left(e^{x}-2x+3\right) \\ &= e^{-x}\left(-e^{x}+x^{2}-3x+1+e^{x}-2x+3\right) \\ &= e^{-x}\left(x^{2}-5x+4\right) \end{aligned}$$

إذن : $f''(x)=\left(x^{2}-5x+4\right)e^{-x}$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب- لدينا $f''(x)=\left(x^{2}-5x+4\right)e^{-x}$ لكل x من $\mathbb{R}$ و نعلم أن لكل x من $\mathbb{R}$ $e^{-x}>0$

إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $x^{2}-5x+4$

$$\begin{aligned} f''(x)=0 &\Leftrightarrow x^{2}-5x+4=0 \\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ أو } x=4 \end{aligned}$$

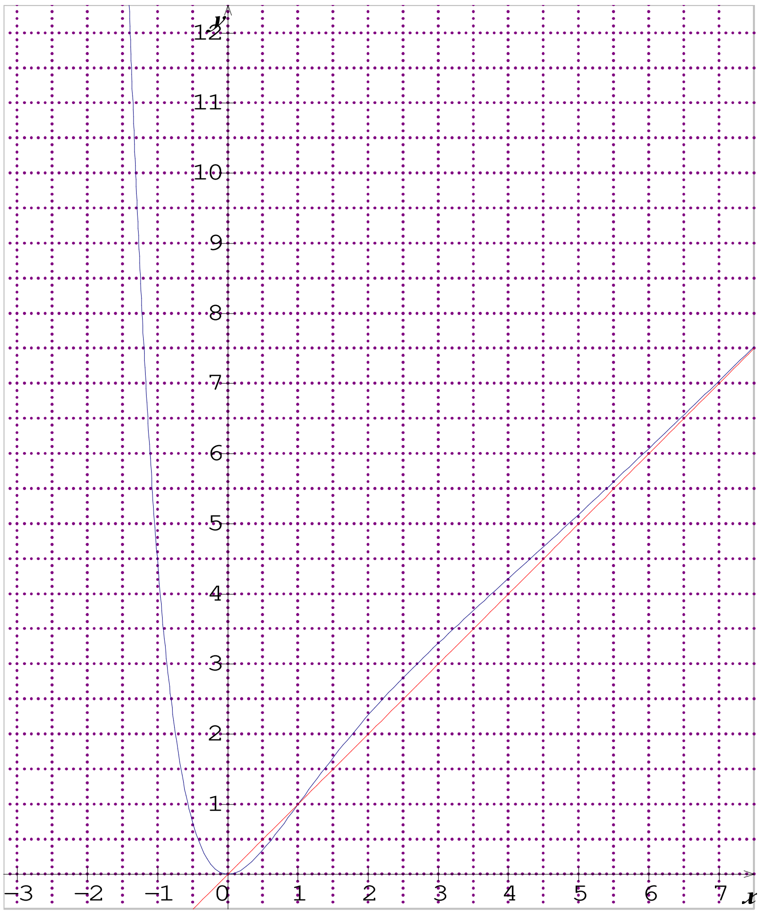
x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

✓ f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 1 إذن (C) نقطة انعطاف أفصولها 1

✓ f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 4 إذن (C) نقطة انعطاف أفصولها 4

و منه المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما على التوالي هما 1 و 4

(5



6) أ- لنبين أن الدالة $H : x \mapsto (x^2+2x+2)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$

✓ لدينا : $H : x \mapsto (x^2+2x+2)e^{-x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

✓ ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= \left((x^2+2x+2)e^{-x}\right)' \\ &= (x^2+2x+2)'\,e^{-x} + (x^2+2x+2)(e^{-x})' \\ &= (2x+2)e^{-x} - (x^2+2x+2)e^{-x} \\ &= (2x+2-x^2-2x-2)e^{-x} \\ &= -x^2e^{-x} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad H'(x) = h(x)$

✓ و منه الدالة $H : x \mapsto (x^2+2x+2)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$

- $$\int_0^1 x^2e^{-x}dx=\int_0^1 -h(x)dx=\left[-H(x)\right]_0^1=\left[-\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}\right]_0^1=\left(\frac{-5}{e}\right)-(-2)=2-\frac{5}{e}=\frac{2e-5}{e}$$

ب-

$$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^{-x} \end{cases} \searrow \begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=-e^{-x} \end{cases} \downarrow$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^{-x}dx &= \left[-xe^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}dx \\
&= \left(\left(-\frac{1}{e}\right)-(0)\right)-\left[e^{-x}\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right) \\
&= \frac{-2}{e}+1 \\
&= \frac{e-2}{e}
\end{aligned}$$

ج- مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \left|f(x)-x\right|dx\times\left\|\vec{i}\right\|\times\left\|\vec{j}\right\| \\
&= \int_0^1 \left(x-f(x)\right)dx\times 1cm\times 1cm \\
&= \int_0^1 \left(-x^2+x\right)e^{-x}dx \\
&= \left(\int_0^1 -x^2e^{-x}dx+\int_0^1 xe^{-x}dx\right)cm^2 \\
&= \left(\left(\frac{5-2e}{e}\right)+\left(\frac{e-2}{e}\right)\right)cm^2 \\
&= \left(\frac{3-e}{e}\right)cm^2
\end{aligned}$$

III. لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0=\frac{1}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) لنبين بالترجع : $0\le u_n\le 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

✓ من أجل $n=0$:

لدينا : $u_0=\frac{1}{2}$

إذن : $0\le u_0\le 1$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

- نفترض أن : $0\le u_n\le 1$
- و نبين أن : $0\le u_{n+1}\le 1$ ؟

لدينا حسب الإفتراض : $0\le u_n\le 1$ و حسب نتيجة *السؤال* $II-3$) ب- لدينا f تزايدية على $[0,1]$

إذن : $f(0)\le f(u_n)\le f(1)$

إذن : $0\le u_{n+1}\le 1$

✓ نستنتج أن : $0\le u_n\le 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) ليكن $n\in\mathbb{N}$:

لدينا $f(x)-x\le 0 \quad (\forall x\in[0,1])$

و بما أن $0\le u_n\le 1$

فإن : $f(u_n)-u_n\le 0$

و منه $u_{n+1}-u_n\le 0 \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

و بالتالي المتتالية (u_n) تناقصية

3)

✓ بما أن (u_n) تناقصية و مصغورة (بالعدد 0) فإنها متقاربة

✓ لدينا :

$u_0=\frac{1}{2}\in[0,1]$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

- لدينا : f متصلة على $[0,1]$
- $f([0,1])=[f(0),f(1)]=[0,1]$
- (u_n) متقاربة

إذن نهاية المتتالية (u_n) هي حل للمعادلة : $f(x)=x$

$f(x)=x \quad \Leftrightarrow \quad x=0$ *أو* $x=1$

بما أن (u_n) تناقصية فإن $u_n \leq u_0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

إذن $u_n \leq \frac{1}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

إذن $\lim_{n \to +\infty} u_n \leq \frac{1}{2}$

و منه $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$