

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2017
- الموضوع -



المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

NS 22

| | | | |
|---|-------------|--------------------------------|------------------|
| 3 | مدة الإنجاز | الرياضيات | المادة |
| 7 | المعامل | شعبة العلوم التجريبية بمسالكها | الشعبة أو المسلك |

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة .

مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين و مسألة، مستقلة فيما بينها، و تتوزع حسب المجالات كما يلي:

| | | |
|---------|--|----------------|
| 3 نقط | الهندسة الفضائية | التمرين الأول |
| 3 نقط | حساب الاحتمالات | التمرين الثاني |
| 3 نقط | الأعداد العقدية | التمرين الثالث |
| 11 نقطة | دراسة دالة عددية و حساب التكامل و المتتاليات العددية | المسألة |

- بالنسبة للمسألة ، \ln يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري.

التمرين الأول : (3 نقت)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، المستوى (P) المار من النقطة $A(0, 1, 1)$

و $\vec{u}(1, 0, -1)$ متجهة منظمية عليه و الفلكة (S) التي مركزها النقطة $\Omega(0, 1, -1)$ و شعاعها $\sqrt{2}$

(1) أ- بين أن $x - z + 1 = 0$ هي معادلة ديكراتية للمستوى (P) 0.5

ب- بين أن المستوى (P) مماس للفلكة (S) و تحقق من أن $B(-1, 1, 0)$ هي نقطة التماس. 0.75

(2) أ- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من النقطة A و العمودي على المستوى (P) 0.25

ب- بين أن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $C(1, 1, 0)$ 0.75

(3) بين أن $\vec{OC} \wedge \vec{OB} = 2\vec{k}$ و استنتج مساحة المثلث OCB 0.75

التمرين الثاني : (3 نقت)

يحتوي صندوق على ثماني كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس و تحمل كل واحدة منها عددا كما هو مبين في الشكل جانبه.

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق.

(1) نعتبر الحدث A : " من بين الكرات الثلاث المسحوبة لا توجد أية كرة تحمل العدد 0 ." 1.5

و الحدث B : " جداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة يساوي 8 ."

$$\text{بين أن } p(A) = \frac{5}{14} \text{ و أن } p(B) = \frac{1}{7}$$

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة.

$$\text{أ- بين أن } p(X = 16) = \frac{3}{28}$$
 0.5

ب- الجدول جانبه يتعلق بقانون احتمال المتغير العشوائي X أتم ملء الجدول بعد نقله على ورقة تحريرك معللا أجوبتك. 1

| | | | | |
|--------------|---|---|---|----------------|
| x_i | 0 | 4 | 8 | 16 |
| $p(X = x_i)$ | | | | $\frac{3}{28}$ |

التمرين الثالث : (3 نقت)

نعتبر العددين العقديين a و b بحيث $a = \sqrt{3} + i$ و $b = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$

(1) أ- تحقق من أن $b = (1 + i)a$ 0.25

ب- استنتج أن $|b| = 2\sqrt{2}$ و أن $\arg b \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$ 0.5

ج- استنتج مما سبق أن $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ 0.5

(2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v})

نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما a و b و النقطة C التي لحقها c بحيث $c = -1 + i\sqrt{3}$

أ- تحقق من أن $c = ia$ و استنتج أن $OA = OC$ و أن $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ 0.75

ب- بين أن النقطة B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة \overrightarrow{OC} 0.5

ج- استنتج أن الرباعي $OABC$ مربع. 0.5

المسألة : (11 نقطة)

(I) نتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2 \ln x$

(1) تحقق من أن $g(1) = 0$ 0.25

(2) انطلاقا من جدول تغيرات الدالة g جانبه : 1

بين أن $g(x) \leq 0$ لكل x من المجال $]0, 1]$

و أن $g(x) \geq 0$ لكل x من المجال $]1, +\infty[$

| | | |
|---------|-----------|-----------|
| x | 0 | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | | + |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (الوحدة : 1 cm)

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و أول هندسيا النتيجة. 0.5

(2) أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 0.25

ب- بين أن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ ، فرعا شلجيميا في اتجاه المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ 0.75

(3) أ- بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$ 1

ب- بين أن الدالة f تناقصية على المجال $]0, 1]$ و تزايدية على المجال $]1, +\infty[$ 0.75

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0, +\infty[$ 0.25

(4) أ- حل في المجال $]0, +\infty[$ المعادلة $\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0$ 0.5

ب- استنتج أن المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين يتم تحديد زوج إحداثيتي كل منهما. 0.5

ج- بين أن $f(x) \leq x$ لكل x من المجال $]1, 2]$ واستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (D) على $]1, 2]$ 0.75

(5) أنشئ ، في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) ، المستقيم (D) و المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة 1

أفصولها محصور بين 2,4 و 2,5)

(6) أ- بين أن $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln 2)^2$ 0.5

ب- بين أن الدالة $H : x \mapsto 2 \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ على المجال $]0, +\infty[$ 0.25

ج- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right) \ln x dx = (1 - \ln 2)^2$ 0.5

د- احسب ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين 0.5

معادلتاهما $x=1$ و $x=2$

(III) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = \sqrt{3}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من \mathbb{N}

(1) بين بالترجع أن $1 \leq u_n \leq 2$ لكل n من \mathbb{N} 0.5

(2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكنك استعمال نتيجة السؤال (II) 4 ج-) 0.5

(3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها. 0.75

حلول الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2017
مادة الرياضيات - شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

التصحيح من انجاز الأستاذ مبارك هندا

التمرين الأول :

| |
|--|
| <p>1- أ. لتكن : $ax + by + cz + d = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P) وبما ان : $\vec{u}(1,0,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (P) فان : $a=1$ و $b=0$ و $c=-1$ ومنه معادلة المستوى (P) تصبح : $x - z + d = 0$ وبما ان : المستوى (P) يمر من النقطة $A(0,1,1)$ فان : $0 - 1 + d = 0$ أي ان : $d = 1$ ومنه فان : معادلة ديكارتية للمستوى (P) .</p> |
| <p>1- ب. + لنحسب مسافة النقطة $\Omega(0,1,-1)$ عن المستوى (P) : $x - z + 1 = 0$ لدينا : $d(\Omega, (P)) = \frac{ x_\Omega - z_\Omega + 1 }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ يعني : $d(\Omega, (P)) = \frac{ 0 - (-1) + 1 }{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}}$ أي : $d(\Omega, (P)) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ وبما ان شعاع الفلكة (S) هو : $R = \sqrt{2}$ وان : $d(\Omega, (P)) = \sqrt{2}$ أي : $d(\Omega, (P)) = R = \sqrt{2}$ فان : المستوى (P) مماس للفلكة (S) . + لنتحقق من ان النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة تماس (P) و (S) ▪ لنتحقق من كون $B \in (P)$: $-1 - 0 + 1 = 0$: اذن : $B \in (P)$ ▪ لنتحقق من كون $B \in (S)$: لدينا مركز الفلكة (S) هو $\Omega(0,1,-1)$ وشعاعها $R = \sqrt{2}$ أي ان : (S) : $(x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (z - (-1))^2 = \sqrt{2}^2 = 2$ أي ان : (S) : $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 2$ ولدينا : $(-1)^2 + (1 - 1)^2 + (0 + 1)^2 = 2 = 2$: اذن : $B \in (S)$ ومنه فان : النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة تماس (P) و (S) .</p> |
| <p>2 - أ. لدينا : المستقيم (Δ) يمر من النقطة $A(0,1,1)$ وبما ان : $(\Delta) \perp (P)$ فان : $\vec{u}(1,0,-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (P) فان : $\begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 1 + 0t \\ z = 1 - 1t \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .</p> |
| <p>2- ب. ولدينا : $d(\Omega, (\Delta)) = \frac{\ \vec{\Omega A} \wedge \vec{n}\ }{\ \vec{n}\ } = \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{2} = R$ ومنه (Δ) مماس للفلكة (S) لدينا : (S) : $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 2$ و $C(1,1,0)$ وبما ان : $1^2 + (1 - 1)^2 + (0 + 1)^2 = 2 = 2$ فان : $C \in (S)$ ولدينا من جهة أخرى : (Δ) : $\begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 1 + 0t \\ z = 1 - 1t \end{cases}$ و أي : $\begin{cases} 1 = 0 + 1t \\ 1 = 1 + 0t \\ 0 = 1 - 1t \end{cases}$ ومنه : $C \in (\Delta)$ وبالتالي (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $C(1,1,0)$</p> |
| <p>3 - حساب $\vec{OC} \wedge \vec{OB}$</p> |

$$\vec{OC} \wedge \vec{OB} = 2\vec{k} : \text{اذن } \vec{OC} \wedge \vec{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

+ حساب مساحة المثلث OCB

$$S_{OCB} = 1 : \text{اذن } S_{OCB} = \frac{|\vec{OC} \wedge \vec{OB}|}{2} = \frac{2}{2}$$

التمرين الثاني :

$$1. \text{ لدينا : } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_6^3}{C_8^3} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \quad \text{و} \quad p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{C_4^3 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{4}{56} = \frac{1}{7}$$

$$2. \text{ أ- لدينا : } p(X=16) = \frac{C_4^2 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

ب- 2

القيم التي يأخذها X : $X(\Omega) = \{0,4,8,16\}$

$$\text{لدينا : } p(X=0) = 1 - p(\overline{X=0}) = 1 - \frac{C_6^3}{C_8^3} = 1 - \frac{20}{56} = \frac{36}{56} = \frac{9}{14}$$

$$\text{و} \quad p(X=4) = \frac{C_4^2 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

$$\text{و} \quad p(X=8) = \frac{C_4^3 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$

$$\text{و} \quad p(X=16) = \frac{6}{56} = \frac{3}{28} \quad (\text{حسب نتيجة السؤال السابق})$$

وبالتالي :

| | | | | |
|--------------|----------------|----------------|---------------|----------------|
| $X = x_i$ | 0 | 4 | 8 | 16 |
| $p(X = x_i)$ | $\frac{9}{14}$ | $\frac{3}{28}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{3}{28}$ |

التمرين الثالث :

$$1. \text{ أ- لدينا : } (1+i)a = (1+i) \cdot (\sqrt{3}+i) = \sqrt{3}+i+\sqrt{3}i-1 = \sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1) = b$$

$$\text{اذن : } b = (1+i)a$$

$$1. \text{ ب- لدينا : } b = (1+i)a \quad \text{يعني : } |b| = |(1+i)a| = |1+i| \times |a| = \sqrt{1^2+1^2} \times \sqrt{3^2+1^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{لدينا : } \arg b \equiv \arg[(1+i)a] \equiv \arg(1+i) + \arg(a)$$

$$\text{و لدينا : } 1+i = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{أي أن : } \arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{و : } a = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{أي أن : } \arg(a) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$\text{وبالتالي : } \arg b \equiv \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) [2\pi] \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$$

$$1. \text{ ج- لدينا : } b = \sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1) \quad \text{و} \quad |b| = 2\sqrt{2} \quad \text{يعني : } b = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{يعني : } b = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) \quad \text{وبمأن : } \arg b \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi] \quad \text{فان : } \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$2. \text{ أ- لدينا : } ia = i \cdot (\sqrt{3}+i) = \sqrt{3}i + i^2 = -1 + \sqrt{3}i \quad \text{اذن : } c = ia$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |c| = |a| \\ \arg \frac{c}{a} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right\} : \text{يعني} \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{c}{a} \right| = 1 \\ \frac{c}{a} = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \end{array} \right. : \text{يعني أن } \frac{c}{a} = i : \text{لدينا } c = ia$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OC} \\ (\overline{OA}, \overline{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right\} : \text{اذن} \left\{ \begin{array}{l} |c - o| = |a - o| \\ \arg \frac{c - o}{a - o} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right\} : \text{يعني}$$

2-ب تذكران : ليكن z لحق نقطة M من المستوى العقدي و z' لحق النقطة M' صورة M

بالازاحة T التي متجهتها \overline{OC} . يعني : $T(M) = M' \Leftrightarrow \overline{MM'} = \overline{OC} \Leftrightarrow z' - z = c$

لدينا : + لحق المتجهة \overline{OC} هو : $\text{Aff}(\overline{OC}) = c = ia$

+ لحق المتجهة \overline{AB} هو : $\text{Aff}(\overline{AB}) = b - a = (1 + i) \cdot a - a = ia$

اذن : $\overline{AB} = \overline{OC}$ أي $b - a = c$

ومنه فان : النقطة B هي صورة النقطة A بالازاحة التي متجهتها \overline{OC} .

2-ج- لدينا : B هي صورة النقطة A بالازاحة التي متجهتها \overline{OC} يعني : $\overline{AB} = \overline{OC}$

أي ان : $OABC$ متوازي أضلاع

وبما أن : $OA = OC$ وان : $(\overline{OA}, \overline{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ (حسب نتيجة السؤال 2أ)

فان : $OABC$ مربع.

المسألة :

I- 1- لدينا : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2 \ln x$ و : $D_g =]0, +\infty[$ و : $1 \in]0, +\infty[$

يعني : $g(1) = 1^2 + 1 - 2 + 2 \ln 1$ اذن : $g(1) = 0$

2- ليكن x عنصرا من المجال $]0, +\infty[$ ، يعني : $x \in]0, 1[$ أو $x \in]1, +\infty[$

▪ اذا كان : $x \in]0, 1[$ لدينا $x \leq 1$ وبما أن g تزايدية حسب جدول التغيرات فان : $g(x) \leq g(1)$

ومنه فان : $\forall x \in]0, 1[\quad g(x) \leq 0$

▪ اذا كان : $x \in]1, +\infty[$ لدينا $x \geq 1$ وبما أن g تزايدية حسب جدول التغيرات فان : $g(x) \geq g(1)$

ومنه فان : $\forall x \in]1, +\infty[\quad g(x) \geq 0$

II- 1- لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{2}{x} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

فان : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

بما ان $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ فان : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي للمنحنى (C) على يمين 0.

2- أ- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln x - 2 \frac{\ln x}{x}$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

فان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2-ب لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln x}{x} - 2 \frac{\ln x}{x^2}$ وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

فان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

ولدينا من جهة اخرى : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{2}{x}) \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 2 \frac{\ln x}{x}$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

فان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty$

ومنه فان : المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجيمياً اتجاهه المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ بجوار $+\infty$

3-أ. ليكن x عنصراً من المجال $]0, +\infty[$ ، ولدينا : $f(x) = x + (1 - \frac{2}{x}) \ln x$

اذن : $f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} \ln x + (1 - \frac{2}{x}) \cdot \frac{1}{x}$ يعني : $f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} \ln x + \frac{x-2}{x^2}$

يعني : $f'(x) = \frac{x^2 + x - 2 + 2 \ln x}{x^2}$ اذن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ $\forall x \in]0, +\infty[$

3-ب. لدينا : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ $\forall x \in]0, +\infty[$ و $x^2 > 0$: $\forall x \in]0, +\infty[$

اذن إشارة f' هي نفسها إشارة $g(x)$ لكل $x \in]0, +\infty[$ وحسب نتيجة السؤال (2-أ) :

لدينا : $g(x) \leq 0$ $\forall x \in]0, 1[$ ومنه : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \leq 0$ اذن : f تناقصية على $]0, 1[$

ولدينا : $g(x) \geq 0$ $\forall x \in]1, +\infty[$ ومنه : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \geq 0$ اذن : f تزايدية على $]1, +\infty[$

3-ج

| | | | |
|---------|-----------|---|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | - | + |
| $f(x)$ | $+\infty$ | 1 | $+\infty$ |

4-أ. لدينا : $(1 - \frac{2}{x}) \ln x = 0$ يعني : $\ln x = 0$ أو $1 - \frac{2}{x} = 0$ يعني : $x = 1$ أو $x = 2$

اذن مجموعة حلول المعادلة $(1 - \frac{2}{x}) \ln x = 0$ على المجال $]0, +\infty[$ هي : $S = \{1, 2\}$ لاحظ ان : $1 \in]0, +\infty[$ وان : $2 \in]0, +\infty[$

4-ب. لدينا : $f(x) = x$ يعني : $(1 - \frac{2}{x}) \ln x = 0$ يعني : $x = 1$ أو $x = 2$

ومنه المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين هما : $M(1, 1)$ و $N(2, 2)$

4-ج. لدينا : $f(x) - x = (1 - \frac{2}{x}) \ln x = \frac{x-2}{x} \cdot \ln x$; $\forall x \in]0, +\infty[$

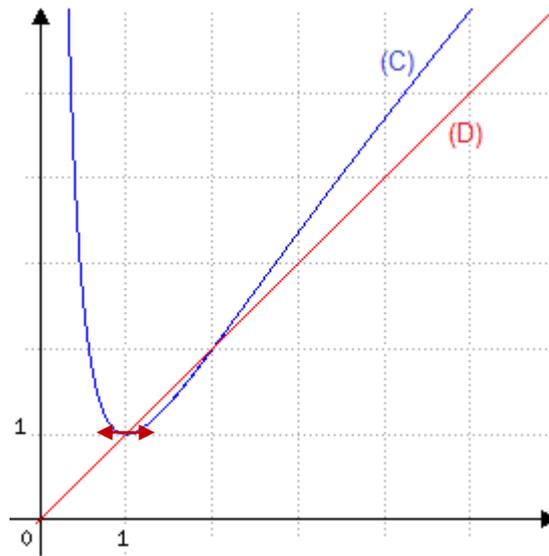
وبما أن : $\forall x \in [1, 2]$ $\ln x \geq 0$ و $\forall x \in [1, 2]$ $x - 2 \leq 0$ و $\forall x \in [1, 2]$ $x \geq 0$

فان : $\forall x \in [1, 2]$ $\frac{x-2}{x} \cdot \ln x \leq 0$ أي ان : $\forall x \in [1, 2]$ $f(x) - x \leq 0$

وبالتالي فان : $\forall x \in [1, 2]$ $f(x) \leq x$

بما أن $\forall x \in [1,2] f(x) \leq x$ فإن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $[1,2]$

5- تمثيل المنحنى (C) والمستقيم (D) في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) حيث $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1cm$



أ.6
$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \ln x \cdot dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^2 = \frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot (\ln 2)^2$$

ب.6 لدينا $h(x) = \frac{2}{x} - 1$ و $H(x) = 2 \ln x - x$

لدينا H دالة متصلة على المجال $]0, +\infty[$ (لأنها مجموع دوال متصلة على $]0, +\infty[$)

ولدينا $H'(x) = h(x)$: يعني $H'(x) = (2 \ln x - x)' = \frac{2}{x} - 1$

اذن H دالة أصلية للدالة h على المجال $]0, +\infty[$.

ج.6 لدينا
$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx = \left[(2 \ln x - x) \cdot \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2 \ln x - x}{x} dx = (2 \ln 2 - 2) \cdot \ln 2 - 2 \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx + [x]_1^2$$

يعني
$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx = 2(\ln 2)^2 - 2 \ln 2 - (\ln 2)^2 + 1 = (\ln 2)^2 - 2 \ln 2 + 1$$

اذن
$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx = (\ln 2 - 1)^2 = (1 - \ln 2)^2$$

د.6 لتكن \mathcal{A} مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) والمستقيم (D) والمستقيمين اللذين

معادلتاهما $x=1$ و $x=2$.

لدينا
$$\mathcal{A} = \int_1^2 |f(x) - x| dx$$

وحسب نتيجة السؤال (II-4-ج) $\forall x \in [1,2] f(x) \leq x$ أي أن $\forall x \in [1,2] f(x) - x \leq 0$

أي أن $\forall x \in [1,2] |f(x) - x| = -(f(x) - x) = \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \cdot \ln x$

ومنه
$$\mathcal{A} = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx = (1 - \ln 2)^2 cm^2$$

III. 1- بالنسبة لـ $n=0$ لدينا $u_0 = \sqrt{3}$ ومنه $1 \leq u_0 \leq 2$ (العبارة صحيحة لأجل $n=0$)

نفترض أن $1 \leq u_n \leq 2$ ونبين أن $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

لدينا $1 \leq u_n \leq 2$ أي أن $u_n \in]1, +\infty[\subset]1, 2[$ وبما أن f تزايدية على $]1, +\infty[$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

فان $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$ أي أن $1 \leq u_{n+1} \leq 2$ (العبارة صحيحة لأجل $n+1$)

وبالتالي : $1 \leq u_n \leq 2$; $\forall n \in \mathbb{N}$

2- لدينا حسب نتيجة السؤال (II-4-ج) : $f(x) \leq x$; $\forall x \in [1,2]$
ولدينا من جهة أخرى : $1 \leq u_n \leq 2$; $\forall n \in \mathbb{N}$ أي أن : $u_n \in [1,2]$; $\forall n \in \mathbb{N}$
اذن : $f(u_n) \leq u_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$ يعني $u_{n+1} \leq u_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$
وبالتالي فان المتتالية (u_n) تناقصية

3- + لدينا : $1 \leq u_n \leq 2$; $\forall n \in \mathbb{N}$ يعني ان المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 1
وبما أن المتتالية (u_n) تناقصية فانها متقاربة .
+ لدينا f متصلة على المجال $]0, +\infty[$ وبالخصوص على المجال $[1,2]$
و : $f([1,2]) = [1,2]$ أي ان : $f([1,2]) \subset [1,2]$ وبما أن (u_n) متقاربة و $u_0 \in [1,2]$
فان النهاية l للمتتالية (u_n) تحقق : $f(l) = l$
وحسب نتيجة السؤال (II-4-ب) : $l = 1$ أو $l = 2$
وبما أن (u_n) تناقصية فان : $u_n \leq u_0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ أي : $u_n \leq \sqrt{3}$; $\forall n \in \mathbb{N}$ أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \sqrt{3}$
وبالتالي فان : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

التصحيح من انجاز الأستاذ مبارك هندا

Phy.handa@gmail.com

GSM : 0661931283