

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2015
- الموضوع -

RS 25

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques.....(4 pts)
- Le deuxième exercice se rapporte à l'arithmétique et au calcul des probabilités.....(3 pts)
- Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes.....(3pts)
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.....(6 pts)
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.....(4 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1:(4 points)

Première partie: On munit $\mathbb{C}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$((x,y) \in \mathbb{C}^2) \quad x * y = x + y - e^{xy} + 1$$

- 0.25 1-a) Montrer que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{C}$
 0.5 b) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera.
 0.5 2- Sachant que l'équation : $3 + x - e^{2x} = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes a et b .
 Montrer que la loi $*$ n'est pas associative dans $\mathbb{C}$

Deuxième partie : On rappelle que $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ est un groupe commutatif.

Pour tout x et y réels, on pose : $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$ et soit $F = \{M(x,y) / (x,y) \in \mathbb{C}^2\}$

- 0.5 1- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$
 0.5 2- Montrer que F est stable dans $(M_2(\mathbb{C}), \cdot)$
 3- On considère l'application j de $\mathbb{C}^*$ dans F qui associe à tout nombre complexe $x + iy$ (où x et y sont deux réels) la matrice $M(x,y)$.
 0.5 a) Montrer que j est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ vers $(F, \cdot)$
 0.25 b) On pose : $F^* = F - \{M(0,0)\}$. Montrer que $j(\mathbb{C}^*) = F^*$
 0.25 c) Montrer que $(F^*, \cdot)$ est un groupe commutatif.
 0.75 4- Montrer que $(F, +, \cdot)$ est un corps commutatif.

EXERCICE2: (3 points)

- 0.5 I-1- a étant un entier, montrer que si a et 13 sont premiers entre eux alors $a^{2016} \equiv 1 \pmod{13}$
 2- On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E): $x^{2015} \equiv 2 \pmod{13}$ et soit x une solution de l'équation (E).
 0.5 a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.
 0.5 b) Montrer que : $x \not\equiv 7 \pmod{13}$
 0.5 3- Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \{7 + 13k / k \in \mathbb{Z}\}$
 II- Une urne contient 50 boules portant les numéros de 1 à 50 (les boules sont indiscernables au toucher)
 0.5 1- On tire au hasard une boule de l'urne.
 Quelle est la probabilité d'obtenir une boule portant un numéro qui est solution de l'équation (E) ?
 0.5 2- On tire au hasard une boule de l'urne, on note son numéro, puis on la remet dans l'urne. On répète l'expérience précédente 3 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule portant un numéro qui est solution de l'équation (E) ?

EXERCICE3:(3 points)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante: $(E) : z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0$

- 0.25 1-a)Vérifier que $(1 - 3i)^2$ est le discriminant de l'équation (E)
- 0.5 b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ (on prendra z_1 imaginaire pur)
- 0.5 c) Montrer que: $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
- 2- Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère le point A d'affixe z_1 et le point B d'affixe z_2
- 0.25 a)Déterminer le nombre complexe e affixe du point E milieu du segment $[AB]$
- 0.5 b) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et soit c l'affixe du point C image du point E
- 0.5 par la rotation r . Montrer que : $c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$
- 1 c) On considère D le point d'affixe $d = 1 + \frac{3}{2}i$. Montrer que le nombre $\frac{z_2 - d}{c - d} \cdot \frac{c - z_1}{z_2 - z_1}$ est réel puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

EXERCICE4:(6 points)

Soit n un entier naturel non nul .

On considère la fonction f_n à variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par: $f_n(x) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$

Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 0.75 1-a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$, puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 0.75 b) Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'_n(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$
- 0.25 c) Montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- 0.5 2-a) Montrer que le point $I_n(n, \frac{1}{2})$ est le centre de symétrie de la courbe (C_n)
- 0.5 b) Construire la courbe (C_1) .
- 0.75 c) Calculer l'aire de la surface plane limitée par la courbe et les droites d'équations: $x = 0, x = 1$ et $y = 0$
- 0.75 3-a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $f_n(x) = x$ admet une solution unique u_n dans

l'intervalle $]0, n[$.

- 0.5 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall x \in]0, n[) f_{n+1}(x) < f_n(x)$
- 0.75 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.
- 0.5 d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE5:(4 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $g(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$

- 0.5 1-Montrer que la fonction g est paire.
- 0.75 2-Montrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}, +\infty[$ puis calculer $g'(x)$ pour $x > 0$
- 0.5 3-a) En utilisant une intégration par parties, vérifier que:

$$\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

- 0.75 b) Montrer que: $(\forall x > 0) |g(x)| \leq \frac{2}{x}$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

- 0.5 4-a) Montrer que: $(\forall x > 0) 0 \leq \int_x^{3x} \frac{1 - \cos t}{t} dt \leq 2x$

(Remarquer que : $(\forall t > 0) 1 - \cos t \leq t$)

- 0.5 b) Vérifier que: $(\forall x > 0) g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$

- 0.5 c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

FIN

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2015
- عناصر الإجابة -

RR 25

ⵜⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ
ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ
ⵏ ⵓⵙⵔⵉⵎ ⵏ ⵓⵙⵔⵉⵎ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعبة أو المسلك

سليم التقييط	عناصر الإجابة	التمرين الأول
0.25		الجزء الأول
0.5	0 هو العنصر المحايد	(أ-1)
0.5	إذا كان القانون تجميعي فإن المماثل إذا وجد يكون وحيدا و هذا يناقض كون المعادلة $2 * x = 0$ (E) تقبل حلين مختلفين.	(ب)
0.5		-2
0.5		الجزء الثاني
0.5		-1
0.5		-2
0.5	التشاكل	(أ-3)
0.25		(ب)
0.25	زمرة تبادلية $(F^*, ')$	(ج)
0.75	توزيعية الضرب بالنسبة للجمع في F 0.25 باقي المسلمات 0.5	-4

سليم التقييط	عناصر الإجابة	التمرين الثاني
0.5	تطبيق مبرهنة فيرما	-1
0.5	x و 13 أوليان فيما بينهما	(أ-2)
0.5	$x \in [13]$ ؛	(ب)
0.5	تحديد مجموعة الحلول	-3

0.5	عدد الحالات الممكنة هو 50 و عدد الحالات التي تحقق الحدث هو 4 إذن الاحتمال هو $\frac{4}{50}$	-1	-II
0.5	حالة تكرار نفس التجربة : $C_3^2 \times \frac{4}{50} - \frac{4}{50}$	-2	

سلم التنقيط	عناصر الإجابة	التمرين الثالث	
0.25		-1 (أ)	
0.5		(ب)	
0.5		(ج)	
0.25		-2 (أ)	
0.5		(ب)	
1	قيمة الجداء $(\frac{1}{2}) \dots\dots\dots 0.5$ التأويل $\dots\dots\dots 0.5$	-3	

سلم التنقيط	عناصر الإجابة	التمرين الرابع	
0.75	0.25 لكل نتيجة	-1 (أ)	
0.75	قابلية الاشتقاق $\dots\dots\dots 0.25$ حساب المشتقة $\dots\dots\dots 0.5$	(ب)	
0.25		(ج)	
0.5		-2 (أ)	
0.5		(ب)	
0.75		(ج)	
0.75		-3 (أ)	
0.5		(ب)	
0.75	الرتابة $\dots\dots\dots 0.5$	(ج)	

0.5	التقارب.....0.25	(د)
-----	------------------	-----

سلم التقييم	عناصر الإجابة	التمرين الخامس
0.5		-1
0.75	قابلية الاشتقاق0.25 حساب المشتقة0.5	-2
0.5		-3 (أ)
0.75	المتفاوتة0.5 النهاية0.25	(ب)
0.5		-4 (أ)
0.5		(ب)
0.5		(ج)