المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⴰⵏⴰⵏ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2014
الموضوع

RS 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من ستة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بحساب الاحتمالات.......................(2ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات................................(1ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالبنيات الجبرية..........................(3.75ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالأعداد العقدية...........................(3.25ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.................................(7.5ن)
- التمرين السادس يتعلق بالتحليل.................................(2.5ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (2 ن)

نعتبر ثلاثة صناديق U و V و W .
يحتوي الصندوق W على كرة سوداء و كرتين بيضاوين و يحتوي كل صندوق من الصندوقين U و V على كرتين سوداوين و كرتين بيضاوين.
نقوم بالتجربة التالية : نسحب كرة من الصندوق W.إذا كانت هذه الكرة بيضاء نضعها في الصندوق U ثم نسحب منه تآنيا كرتين ، أما إذا كانت هذه الكرة سوداء فنضعها في الصندوق V ثم نسحب منه تآنيا كرتين.

1- ما هو احتمال أن يتم السحب من الصندوق U ؟ 0.25

2- ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة؟ 0.75

3- ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المحصل عليها في نهاية التجربة.
حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X 1

التمرين الثاني:(1 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

نضع: $b_n = 2.10^n + 1$ و $c_n = 2.10^n - 1$

1- بين أن: $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$ ثم استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما. 0.5
($a \wedge b$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين a و b)

2- أوجد زوجا (x_n, y_n) من $\mathbb{Z}^2$ يحقق: $b_n x_n + c_n y_n = 1$ 0.5

التمرين الثالث:(3,75 ن)

نضع $J =]-1,1[$

I- لكل عنصرين a و b من المجال J ، نضع: $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$

1- تحقق أن: $(\forall (a,b) \in J^2)\ 1 + ab > 0$ ثم استنتج أن $*$ قانون تركيب داخلي في J 0.75

2- أ) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي. 0.5

ب) بين أن $(J,*)$ يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده. 0.25

ج)بين أن $(J,*)$زمرة تبادلية. 0.5

II – نعتبر التطبيق f المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1- بين أن الدالة f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو J 0.75

2- ليكن g التقابل العكسي للتطبيق f (تحديد g غير مطلوب) .
لكل عنصرين x و y من J نضع: $x \perp y = f(g(x) \times g(y))$
بين أن f تشاكل من $(\mathbb{R}^*, \times)$ نحو $(J^*, \perp)$ حيث: $J^* = J - \{0\}$ 0.5

3- نذكر أن $(\mathbb{R}^*, \times)$ زمرة تبادلية، ونقبل أن القانون $\perp$ توزيعي بالنسبة للقانون $*$ في J .
بين أن $(J, *, \perp)$ جسم تبادلي. 0.5

التمرين الرابع:(3.25 ن)

I - 1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + i = 0$ (a يرمز لحل المعادلة بحيث: $Re(a) > 0$) 0.5

2- أ) حدد معيار و عمدة العدد العقدي $1 + a$ 0.5

ب) استنتج أن: $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ 0.25

ج) تحقق أن: $(1+a)(1-a) = 1 + i$ ثم استنتج الشكل المثلثي للعدد $1 - a$ 0.5

II - في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A و B و M و M' التي ألحاقها على التوالي هي a و $-a$ و z و z' و نفترض أن: $zz'+i=0$

1- لتكن N النقطة التي لحقها $\overline{z}$ مرافق z
بين أن المستقيمين (ON) و (OM') متعامدان. 0.25

2- أ) بين أن : $z'-a=i\dfrac{z-a}{az}$ 0.25

ب) بين أنه إذا كان $z\neq -a$ فإن : $z'\neq -a$ و $\dfrac{z'-a}{z'+a}=-\dfrac{z-a}{z+a}$ 0.5

3- نفترض أن النقط A و B و M غير مستقيمية.
بين أن النقطة M' تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث ABM 0.5

التمرين الخامس:(7.5 نقط)

I - لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{-\ln x}{\sqrt{x}}$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث: $\|\vec{i}\|=1cm$

1- أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما. 1

2- أحسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$ 0.75

3- لكل n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على $]0,1[$ بما يلي: $g_n(x)=f(x)-x^n$

أ) بين أن الدالة g_n تناقصية قطعا على المجال $]0,1[$ 0.25

ب) استنتج أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]0,1[$ بحيث: $f(\alpha_n)=(\alpha_n)^n$ 0.5

ج) بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $g_n(\alpha_{n+1})<0$ 0.5

د) بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. 0.75

4- نضع $l=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

أ) تحقق أن $0<\alpha_1\leq l\leq 1$ 0.25

ب) تحقق أن: $h(\alpha_n)=n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ حيث : $h(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln(-\ln(x))}{\ln x}$ 0.25

ج) بين أن: $l=1$ 0.5

د) استنتج أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n=0$ 0.25

II - 1 - أ) أدرس إشارة التكامل $\int_x^1 f(x)\,dx$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ ، 0.25

ب) باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_x^1 f(x)\,dx=4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x$ $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$ 0.5

ج) أستنتج بالوحدة cm^2 مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها على التوالي: 0.25
$x=1$ و $x=e^2$ و $y=0$

2- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع: $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

أ) بين أنه لكل عددين صحيحين طبيعيين n و k بحيث $n \geq 2$ و $1 \leq k \leq n-1$ لدينا: 0.5

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ب) بين أن : $\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq u_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$ و $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ 0.5

ج) استنتج أن $\lim_{n \to +\infty} u_n = 4$ 0.5

التمرين السادس (2.5 نقط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي: $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{1} e^{-t^2}dt$

1- لكل x من ، نضع : $k(x) = \int_{1}^{x} e^{-t^2}dt$

أ)تحقق أنه لكل x من المجال $[0,+\infty[$ لدينا: $g(x) = -k(\sqrt{x})$ 0.25

ب) بين أن الدالة g متصلة على $[0,+\infty[$ وقابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ 0.5

ج) احسب $g'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$ ثم استنتج أن الدالة g تناقصية قطعا على المجال $[0,+\infty[$ 0.5

2- أ) بين أن: $\frac{g(x)-g(0)}{x} < -\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}$ $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)$ 0.75

ب) استنتج أن الدالة g غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها. 0.5

انتهى

التمرين الأول

$$U(2N,2B);V(2N,2B);W(1N,2B)$$

1) الاحتمال لكي يتم السحب من الصندوق U

لكي يتم السحب من الصندوق U يجب أن نسحب كرة بيضاء من الصندوق W و هذا الاحتمال هو: $\frac{2}{3}$

$\boxed{\text{الاحتمال لكي يتم السحب من الصندوق } U \text{ هو : } \frac{2}{3}}$

2) احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة:

يتحقق الحدث إذا و فقط إذا سحبنا كرة بيضاء من $W(1N,2B)$ و كرتين بيضاوين من $U(2N,3B)$

أو سحبنا كرة سوداء من $W(1N,2B)$ و كرتين بيضاوين من $V(3N,2B)$

إذن احتمال هذا الحدث هو : $\frac{2}{3}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{2\times3+1}{3\times10}=\frac{7}{30}$

$\boxed{\text{احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة:هو } \frac{7}{30}}$

3) قانون احتمال المتغير العشوائي X

لدينا $X(\Omega)=\{0,1,2\}$

$p((X=0))=\frac{2}{3}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{5}{30}$ و $p((X=1))=\frac{2}{3}\times\frac{C_2^1\times C_3^1}{C_5^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_3^1\times C_2^1}{C_5^2}=\frac{18}{30}$

و لدينا حسب السؤال 2) $p((X=2))=\frac{7}{30}$

ومنه قانون احتمال المتغير العشوائي X مقدم في الجدول التالي:

k	0	1	2
$p((X=k))$	$\frac{5}{30}$	$\frac{18}{30}$	$\frac{7}{30}$

التمرين الثاني

$$(\forall n\in\mathbb{N});c_n=2.10^n-1 \text{ و } b_n=2.10^n+1$$

1) لدينا $b_n\wedge c_n=c_n\wedge(b_n-c_n)=c_n\wedge 2$ و بما أن c_n عدد فردي فإن $c_n\wedge 2=1$ إذن $b_n\wedge c_n=1$

نستنتج أن b_n و c_n أوليان في ما بينهما

$\boxed{b_n\wedge c_n=c_n\wedge 2 \text{ و } b_n \text{ و } c_n \text{ أوليان في ما بينهما}}$

2) بما أن $b_n\wedge c_n=1$ فإن حسب مبرهنة بوزو يوجد (x_n,y_n) من $\mathbb{N}^2$ بحيث $b_nx_n+c_ny_n=1$

نحدد x_n و y_n باستعمال خوارزمية أقليدس:

لدينا $\begin{cases}b_n=c_n+2\\ c_n=2(10^n-1)+1\end{cases}\Rightarrow 1=c_n-2(10^n-1)\Rightarrow 1=c_n-(b_n-c_n)(10^n-1)\Rightarrow 1=c_n10^n+(1-10^n)b_n$

نستنتج أن

$\boxed{x_n=1-10^n \text{ و } y_n=10^n}$

التمرين الثالث

I $\quad \forall(a,b)\in(]-1,1[)^2 ; a*b=\dfrac{a+b}{1+ab}$

1) لدينا: $\begin{cases}-1<a<1\\-1<b<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|a|<1\\|b|<1\end{cases}\Rightarrow|ab|<1\Rightarrow-1<ab<1\Rightarrow0<1+ab<2$

إذن

$$\boxed{\forall(a,b)\in(]-1,1[)^2 ;1+ab>0}$$

لدينا $a*b-1=\dfrac{a+b}{1+ab}-1=\dfrac{a+b-1-ab}{1+ab}=\dfrac{(a-1)(1-b)}{1+ab}<0$

و $a*b+1=\dfrac{a+b}{1+ab}+1=\dfrac{a+b+1+ab}{1+ab}=\dfrac{(a+1)(1+b)}{1+ab}>0$

نستنتج أن $-1<a*b<1$ و منه $a*b\in J$ و بالتالي:

$$\boxed{\text{قانون داخلي في } J \; *}$$

2) أ) لنبين أن القانون * تبادلي و تجميعي

لدينا $\left(\forall(x,y)\in J^2\right);x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}=\dfrac{y+x}{1+yx}=y*x$ إذن القانون * تبادلي

و لدينا $\left(\forall(x,y,z)\in J^3\right);(x*y)*z=\dfrac{x+y}{1+xy}*z=\dfrac{\dfrac{x+y}{1+xy}+z}{1+\dfrac{x+y}{1+xy}z}=\dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$

و $x*(y*z)=x*\dfrac{y+z}{1+yz}=\dfrac{x+\dfrac{y+z}{1+yz}}{1+x\dfrac{y+z}{1+yz}}=\dfrac{x+xyz+y+z}{1+yz+xy+xz}$

إذن $\left(\forall(x,y,z)\in J^3\right);(x*y)*z=x*(y*z)$ و منه القانون *تجميعي

$$\boxed{\text{القانون * تبادلي و تجميعي}}$$

ب) تحديد العنصر المحايد

لنحدد e من J بحيث $(\forall x\in J);x*e=x$

$(\forall x\in J);x*e=x\Leftrightarrow\dfrac{x+e}{1+xe}=x\overset{(1+xe>0)}{\Leftrightarrow}x+e=x+x^2e\Leftrightarrow(1-x^2)e=0$

و بما أن $x\in]-1,1[$ فإن $1-x^2\neq0$ و منه $e=0$ و $(0\in J)$

القانون * تبادلي إذن $(\forall x\in J);x*0=0*x=x$ وهذا يعني أن

$$\boxed{0 \text{ هو العنصر المحايد للقانون } *}$$

ج) لنبين أن $(J,*)$ زمرة تبادلية

ليكن x من J و x' مماثله(إذا وجد) بالنسبة للقانون *

لدينا $x*x'=0\Leftrightarrow\dfrac{x+x'}{1+xx'}=0\Leftrightarrow x'=-x$

و بما أن $x\in]-1,1[$ فإن $-x\in]-1,1[$ و القانون * تبادلي إذن $(\forall x\in J);x*(-x)=(-x)*x=0$

و منه لكل x من J مماثل بالنسبة للقانون $*$ هو $-x$

خلاصة: القانون $*$ تبادلي و تجميعي و يقبل عنصرا محايدا و لكل عنصر من J مماثل في J إذن

$\boxed{(J,*) \text{ زمرة تبادلية}}$

II f تطبيق معرف على $\mathbb{R}$ ب $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

1) لنبين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو J

ليكن y من J و لنحل المعادلة: $(x\in\mathbb{R});\ f(x)=y$

$$(x\in\mathbb{R});\ f(x)=y \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{e^x+1}=y \Leftrightarrow ye^x+y=e^x-1 \Leftrightarrow e^x=\frac{y+1}{1-y}$$

و بما أن J $y\in$ فإن $\dfrac{y+1}{1-y}>0$ ومنه لكل y من J سابق و حيد في $\mathbb{R}$ هو $\ln\dfrac{1+y}{1-y}$ نستنتج أن

$\boxed{f \text{ تقابل من } \mathbb{R} \text{ نحو } J}$

ملاحظة: يمكن أن نبين تقابل f باستعمال اتصال و رتابة f .

2) $\perp$ قانون معرف على J ب: $(\forall(x,y)\in J^2);\ x\perp y=f\big(g(x)\times g(y)\big)$

نبين f أن تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(J^*,\perp)$ بحيث $J^*=J\setminus\{0\}$

لدينا $\left(\forall(x,y)\in\left(\mathbb{R}^*\right)^2\right);\ f(x)\perp f(y)=f\Big(g\big(f(x)\big)\times g\big(f(y)\big)\Big)$

و بما أن g هو التقابل العكسي ل f فإن $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, g\big(f(x)\big)=x, g\big(f(y)\big)=y$

نستنتج أن $\left(\forall(x,y)\in\left(\mathbb{R}^*\right)^2\right);\ f(x)\perp f(y)=f(x\times y)$ و هذا يعني أن

$\boxed{\text{أن } f \text{ تشاكل من } (\mathbb{R}^*,\times) \text{ نحو } (J^*,\perp)}$

3) لنبين أن $(J,*,\perp)$ جسم تبادلي

لدينا f تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(J^*,\perp)$ و $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية إذن $(J^*,\perp)$ زمرة تبادلية

و لدينا $(J,*)$ زمرة تبادلية و $\perp$ توزيعي على $*$ نستنتج أن

$\boxed{(J,*,\perp) \text{ جسم تبادلي}}$

التمرين الرابع

I 1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+i=0$

لدينا $z+i=0 \Leftrightarrow z^2=\dfrac{1}{2}(1-i)^2 \Leftrightarrow (z=\dfrac{1}{\sqrt2}-i\dfrac{1}{\sqrt2}$ أو $z=-\dfrac{1}{\sqrt2}+i\dfrac{1}{\sqrt2})$

بما أن a هو حل المعادلة بحيث $\mathrm{Re}(a)>0$ فإن $a=\dfrac{1}{\sqrt2}-i\dfrac{1}{\sqrt2}$ ومنه مجموعة حلول المعادلة هي :

$\boxed{S=\{-a,a\}}$

2)(أ) معيار و عمدة العدد العقدي $1+a$

لدينا

$$1+a=1+\frac{1}{\sqrt2}-i\frac{1}{\sqrt2}=1+\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-2i\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=2\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

نستنتج أن

$\boxed{|1+a|=2\cos\frac{\pi}{8} \quad \text{و} \quad \arg(1+a)\equiv-\frac{\pi}{8}[2\pi]}$

ب) استنتاج $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

حسب السؤال السابق لدينا $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}|1+a|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

ومنه

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

ج) لنبين أن $(1+a)(1-a)=1+i$

لدينا $(1+a)(1-a)=1-a^2=1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right)^2=1-\left(\frac{1}{2}(+2i)\right)=1+i$

إذن

$$\boxed{(1+a)(1-a)=1+i}$$

استنتاج الشكل المثلثي ل $1-a$

لدينا $1-a=\frac{1+i}{1+a}=\frac{\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]}{\left[2\cos\frac{\pi}{8},-\frac{\pi}{8}\right]}=\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}},\frac{3\pi}{8}\right]=\left[\sqrt{2-\sqrt{2}},\frac{3\pi}{8}\right]$

إذن الشكل المثلثي للعدد $1-a$

$$\boxed{1-a=\left[\sqrt{2-\sqrt{2}},\frac{3\pi}{8}\right]}$$

II في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ لدينا M,B,A و M' النقط التي ألحاقها على التوالي $z,-a,a$ و z'.

بحيث $zz'+i=0$ و N النقطة التي لحقها $\bar{z}$.

1) لنبين أن المستقيمين (ON) و (OM') متعامدان

لدينا $\overline{(\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{ON})}\equiv Arg\left(\frac{aff(\overrightarrow{ON})}{aff(\overrightarrow{OM'})}\right)(2\pi)$ و $Arg\left(\frac{aff(\overrightarrow{ON})}{aff(\overrightarrow{OM'})}\right)\equiv Arg\left(\frac{\bar{z}}{z'}\right)(2\pi)$

و بما أن $\frac{\bar{z}}{z'}=\frac{z\bar{z}}{zz'}=\frac{z\bar{z}}{-i}=iz\bar{z}=\left[z\bar{z},\frac{\pi}{2}\right]$ فإن $Arg\left(\frac{\bar{z}}{z'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)$ و منه $\overline{(\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{ON})}\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)$ و هذا يعني أن

$$\boxed{\text{المستقيمين } (ON) \text{ و } (OM') \text{ متعامدان}}$$

2) أ) لنبين أن $z'-a=i\frac{z-a}{az}$

لدينا $z'-a=\frac{-i}{z}-a=\frac{-i-az}{z}=\frac{-ia-a^2z}{az}\overset{(a^2=-i)}{=}\frac{-ia+iz}{az}=i\frac{z-a}{az}$

و هذا هو المطلوب

$$\boxed{z'-a=i\frac{z-a}{az}}$$

ب) لدينا $z'+a=z'-a+2a=i\frac{z-a}{az}+2a=\frac{iz-ia+2a^2z}{az}=-i\frac{z+a}{az}$

ومنه $z\neq-a\Rightarrow z+a\neq0\Rightarrow z'+a\neq0\Rightarrow z'\neq-a$

أي أن :

إذا كان $z \neq -a$ فإن $z' \neq -a$

ولدينا $z' - a = i\dfrac{z-a}{az}$ و $z' + a = -i\dfrac{z+a}{az}$ إذن $\dfrac{z'-a}{z'+a} = \dfrac{i\dfrac{z-a}{az}}{-i\dfrac{z+a}{az}} = -\dfrac{z-a}{z+a}$ و منه

$$\frac{z'-a}{z'+a} = -\frac{z-a}{z+a}$$

3) بما أن النقط M, B, A غير مستقيمية فإن النقط M, B, A و M' غير مستقيمية

إذن M, B, A و M' متداورة يكافئ $\dfrac{z-a}{z'-a} \times \dfrac{z'+a}{z+a} \in \mathbb{R}$

و لدينا $\dfrac{z'-a}{z'+a} = -\dfrac{z-a}{z+a} \Rightarrow \dfrac{z-a}{z'-a} \times \dfrac{z'+a}{z+a} = -1$ إذن M, B, A و M' متداورة

ومنه

النقطة M' تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث AMB

التمرين الخامس

f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ ب $f(x) = \dfrac{-\ln x}{\sqrt{x}}$

1) حساب نهايتي f عند 0^+ و عند $+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

(لأن $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ و $\lim_{x\to 0^+} (-\ln x) = +\infty$)

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty} -2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0; \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

التأويل الهندسي

: محور الافاصيل مقارب ل (C) و محور الاراتيب مقارب ل (C) بجوار $+\infty$

2) حساب مشتقة f

f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $(\forall x \in \mathbb{R});\ f'(x) = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{x}}{x} + \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{x\ln x - 2x}{2x^2\sqrt{x}} = \dfrac{\ln x - 2}{2x\sqrt{x}}$

إذن

$$(\forall x \in \mathbb{R});\ f'(x) = \frac{\ln x - 2}{2x\sqrt{x}}$$

إشارة f' هي إشارة $\ln x - 2$ أي إشارة $\ln x - \ln e^2$ و منه

f تزايدية قطعا على المجال $[e^2,+\infty[$ و تناقصية قطعا على $]0,e^2]$

3) g_n دالة معرفة على $]0,1[$ ب $g_n(x) = f(x) - x^n$ مع $n \in \mathbb{N}^*$

أ) لنبين أن g_n تناقصية قطعا على $]0,1[$

g_n قابلة للاشتقاق على $]0,1[$ و لدينا $(\forall x\in]0,1[); g_n'(x)=f'(x)-nx^{n-1}$

بمان أن $(\forall x\in]0,1[); f'(x)<0$ فإن $(\forall x\in]0,1[); g_n'(x)<0$ و منه

$\boxed{g_n \text{ تناقصية قطعا على }]0,1[}$

ب) لنبين أن $\exists!\alpha_n\in]0,1[; f(\alpha_n)=(\alpha_n)^n$

g_n متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]0,1[$ إذن g_n تقابل من $]0,1[$ نحو $g_n(]0,1[)$ و لدينا

$$g_n(]0,1[)=\left]\lim_{x\to 1^-} g_n(x), \lim_{x\to 0^+} g_n(x)\right[=]-1,+\infty[$$

و بما أن $0\in]-1,+\infty[$ فإن للمعادلة ل 0 سابق و حيد α_n ب g_n و $\alpha_n\in]0,1[$ يعني $\exists!\alpha_n\in]0,1[; g_n(\alpha_n)=0$

و بما أن $g_n(\alpha_n)=f(\alpha_n)-(\alpha_n)^n$ فإن $f(\alpha_n)=(\alpha_n)^n$ و هذا هو المطلوب:

$$\boxed{\exists!\alpha_n\in]0,1[; f(\alpha_n)=(\alpha_n)^n}$$

ج) لنبين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*); g_n(\alpha_{n+1})<0$

حسب السؤال ج) $\forall n\in\mathbb{N}^*; n+1\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \exists!\alpha_{n+1}\in]0,1[$

و لدينا $f(\alpha_{n+1})=(\alpha_{n+1})^{n+1}$ إذن $g_n(\alpha_{n+1})=(\alpha_{n+1})^{n+1}-(\alpha_{n+1})^n=(\alpha_{n+1})^n(\alpha_{n+1}-1)<0$

و هذا هو المطلوب

$$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*); g_n(\alpha_{n+1})<0}$$

د)لنبين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تزايدية قطعا

لدينا $g_n(\alpha_{n+1})<0$ و $\forall n\in\mathbb{N}^* g_n(\alpha_n)=0$

إذن $\forall n\in\mathbb{N}^* g_n(\alpha_{n+1})<g_n(\alpha_n)$ وبما أن g_n تناقصية قطعا على المجال $]0,1[$ فإن $(\forall n\in\mathbb{N}^*); \alpha_{n+1}>\alpha_n$

ما يعني أن :

$\boxed{\text{المتتالية } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ تزايدية قطعا}}$

المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تزايدية و مكبورة ب 1 إذن فهي متقاربة

4) أ) لنتحقق من أن $0<\alpha_1\le l\le 1$

بما أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*); \alpha_n\in]0,1[$ فإن $\lim\alpha_n\in [0,1]$ و بما أن $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تزايدية قطعا فإن $(\forall n\in\mathbb{N}^*); \alpha_n\ge\alpha_1$

و منه $\lim\alpha_n\ge\alpha_1$ نستنتج أن l نهاية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تحقق

$$\boxed{0<\alpha_1\le l\le 1}$$

ب) لنبين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*); h(\alpha_n)=n$

لدينا $h(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln(-\ln x)}{\ln x}$

$(\forall n\in\mathbb{N}^*); h(\alpha_n)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln(-\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$ و بما أن $(\forall x>0); f(x)=\dfrac{-\ln x}{\sqrt{x}}$

فإن $(\alpha_n)^n=f(\alpha_n)=\dfrac{-\ln\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n}}$

و منه

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);h\left(\alpha_n\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\ln\left(\left(\alpha_n\right)^{n+\frac{1}{2}}\right)}{-\left(\alpha_n\right)^{n+\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\ln\left(\alpha_n\right)}{-\left(\alpha_n\right)^{n+\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{-\left(\alpha_n\right)^{n+\frac{1}{2}}}{-\left(\alpha_n\right)^{n+\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)=n$$

وبالتالي:

$$\boxed{\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);h\left(\alpha_n\right)=n}$$

ج) لنبين أن $l=1$

نفترض أن $l\neq 1$ إذن $0<l<1$ و بما أن الدالة h معرفة و متصلة على المجال $]0,1[$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}h\left(\alpha_n\right)=h\left(l\right)$

و هذا غير ممكن لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}h\left(\alpha_n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ إذن الافتراض الأول خاطئ و عكسه هو الصحيح

$$\boxed{l=1}$$

د) لنبين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\alpha_n\right)^n=0$

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\alpha_n=\ln\left(1\right)<0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln\alpha_n=-\infty$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\alpha_n\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{n\ln\alpha_n}=0$ و هذا هو المطلوب

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\alpha_n\right)^n=0}$$

II -1) أ) لندرس إشارة التكامل $\int_x^1 f\left(x\right)dx$ لكل x من $\mathbb{R}^*$

لدينا $0<x<1\Rightarrow\ln x<0\Rightarrow f\left(x\right)>0\overset{(0<x<1)}{\Rightarrow}\int_x^1 f\left(x\right)dx>0$

و $x>1\Rightarrow\ln x>0\Rightarrow f\left(x\right)<0\overset{(x>1)}{\Rightarrow}\int_x^1 f\left(x\right)dx>0$ و $x=1\Rightarrow\int_x^1 f\left(x\right)dx=0$

نستنتج أن

$$\boxed{\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right);\int_x^1 f\left(x\right)dx\geq 0}$$

ب)لنبين ان $\left(x\in\mathbb{R}_+^*\right);\int_x^1 f\left(x\right)dx=4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x$

لدينا

$$\left(x\in\mathbb{R}_+^*\right);\int_x^1 f\left(x\right)dx=\int_x^1\frac{-\ln x}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}\left(-\ln x\right)\right]_x^1-\int_x^1\left(2\sqrt{x}\right)\left(\frac{-1}{x}\right)dx=2\sqrt{x}\ln x+2\int_x^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$=2\sqrt{x}\ln x+2\left[2\sqrt{x}\right]_x^1=2\sqrt{x}\ln x+4\left(1-\sqrt{x}\right)=4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x$$

و منه

$$\boxed{\left(x\in\mathbb{R}_+^*\right);\int_x^1 f\left(x\right)dx=4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x}$$

ج) حساب مساحة الحيز المحصور بالمنحنى $\left(C\right)$ و المستقيمات التي معادلاتها على التوالي $x=1$ و $x=e^2$ و $x=0$

لتكن S هذه المساحة ب cm^2 لدينا $S=\left(\int_{e^2}^1 f\left(x\right)dx\right)cm^2=\left(4-4\sqrt{e^2}+2\sqrt{e^2}\ln e^2\right)cm^2=4cm^2$

المساحة المطلوبة هي

$$\boxed{S=4cm^2}$$

2) لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع: $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

أ) لدينا f متصلة وتناقصية قطعا على $[0,1]$ و $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\subset[0,1]$ إذن f متصلة وتناقصية قطعا على $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ و منه

$$\frac{k}{n}\le x\le\frac{k+1}{n}\Rightarrow f\left(\frac{k}{n}\right)\ge f(x)\ge f\left(\frac{k+1}{n}\right)\Rightarrow\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dx\ge\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx\ge\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right)dx$$

و لدينا $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dx=\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ و $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right)dx=\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

نستنتج أن لكل n و k من $\mathbb{N}$ بحيث $n\ge2$ و $1\le k\le n-1$ لدينا:

$$\boxed{\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx\le\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

ب)المتفاوتة السابقة تستلزم أن: $\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\sum_{k=1}^{k=n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx\le\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\quad(1)$

لدينا $f(1)=0$ إذن $\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=u_n$

و لدينا $\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)=\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=2}^{k=n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=u_n-\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$

كما أن $\sum_{k=1}^{k=n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$

نستنتج بعد التعويض في (1) أن : $(\forall\in\mathbb{N}^*);u_n\le\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt\le u_n-\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$

يعني أن $(\forall\in\mathbb{N}^*);\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)d\le u_n\le\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$ و هذا هو المطلوب

$$\boxed{(\forall\in\mathbb{N}^*);\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)d\le u_n\le\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)}$$

ج) حسب السؤال ب) و بوضع $x=\frac{1}{n}$ نحصل على $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\int_x^1 f(x)dx\le u_n\le xf(x)+\int_x^1 f(x)dx$

و لدينا $\lim_{n\to+\infty} xf(x)+\int_x^1 f(x)dx=\lim_{x\to0^+}-x\frac{\ln x}{\sqrt{x}}+4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x=\lim_{x\to0^+}-\sqrt{x}\ln x+4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x=4$

و $\lim_{n\to+\infty}\int_x^1 f(x)dx=\lim_{x\to0^+}4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x=4$

إذن حسب خاصيات النهايات و الترتيب

$$\boxed{\lim u_n=4}$$

التمرين السادس

g الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ ب $g(x)=\int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2}dt$ و نضع $(\forall x\in\mathbb{R});k(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$

1) أ) لدينا $(\forall x\in\mathbb{R});g(x)=\int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2}dt=-\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt=-k\left(\sqrt{x}\right)$

أذن

$$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R});g(x)=-k\left(\sqrt{x}\right)}$$

ب)أتصال و اشتقاق الدالة g

الدالة $t \xrightarrow{\varphi} e^{-t^2}$ متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن الدالة k متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (أصلية φ التي تنعدم عند1)

و الدالة $t \xrightarrow{\psi} \sqrt{t}$ متصلة على $[0,+\infty[$ و قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ إذن الدالة g متصلة على $[0,+\infty[$ و قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ (مركب k و ψ)

إذن:

$$\boxed{g \text{ متصلة على } [0,+\infty[\text{ و قابلة للاشتقاق على }]0,+\infty[}$$

ج) حساب $g'(x)$

لدينا $\left(\forall x \in]0,+\infty[\right); g'(x) = -k'\left(\sqrt{x}\right) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$ إذن

$$\boxed{\left(\forall x \in]0,+\infty[\right); g'(x) = \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}}$$

بما أن $\left(\forall x \in]0,+\infty[\right); g'(x) < 0$ فإن g تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ و بما أنها متصلة على يمين 0 فإنها تناقصية قطعا على $[0,+\infty[$

$$\boxed{\text{الدالة } g \text{ تناقصية قطعا على } [0,+\infty[}$$

2)أ) لنبين أن $\forall\left(x \in \mathbb{R}_+^*\right); \dfrac{g(x)-g(0)}{x} < \dfrac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$

ليكن x من $\mathbb{R}_+^*$ الدالة g متصلة على المجال $[0,x]$ و قابلة للاشتقاق على $]0,x[$

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية يوجد c من $]0,x[$ بحيث

$$\frac{g(x)-g(0)}{x} = g'(c) = \frac{-e^{-c^2}}{2\sqrt{c}}$$

لدينا

$$0<c<x \Rightarrow \begin{cases} 0<2\sqrt{c}<2\sqrt{x} \\ c^2<x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} < \dfrac{1}{2\sqrt{c}} \\ -x^2<-c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<\dfrac{1}{2\sqrt{x}} < \dfrac{1}{2\sqrt{c}} \\ 0<e^{-x^2}<e^{-c^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} < \frac{e^{-c^2}}{2\sqrt{c}} \Rightarrow \frac{-e^{-c^2}}{2\sqrt{c}} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$$

ومنه $\forall\left(x \in \mathbb{R}_+^*\right); \dfrac{g(x)-g(0)}{x} < \dfrac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$

$$\boxed{\forall\left(x \in \mathbb{R}_+^*\right); \frac{g(x)-g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}}$$

ب) دراسة قابلية اشتقاق الدالة g على يمين الصفر و التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها

لدينا : $\begin{cases} \forall\left(x \in \mathbb{R}_+^*\right); \dfrac{g(x)-g(0)}{x} < \dfrac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} = -\infty \end{cases}$ إذن $\lim\limits_{x\to +0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = -\infty$

و بالتالي g غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 و مبيان g يقبل نصف مماس عمودي (موجه نحو الأسفل)

$$\boxed{\text{و بالتالي } g \text{ غير قابلة للاشتقاق على يمين } 0 \text{ و مبيان } g \text{ يقبل نصف مماس عمودي (موجه نحو الأسفل)}}$$

إضافة مبيان الدالتين f و h