المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2012
الموضوع

الصفحة 1/1

المادة	الرياضيات	NS25	المعامل	9
الشعب(ة) أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)		مدة الإنجاز	4

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques
- Le deuxième exercice se rapporte aux nombres complexes
- Le troisième exercice se rapporte à l'arithmétique
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse

L'USAGE DES CALCULATRICES NON PROGRAMMABLES EST AUTORISE

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis

EXERCICE 1 :(3.5 points) les parties I et II sont indépendantes

I- Dans l'anneau unitaire $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$, on considère les deux matrices

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0.75 1) Calculer $I-A$ et A^2

0.5 2) En déduire que A admet une matrice inverse que l'on déterminera .

II- Pour tout a et b de l'intervalle $I=]1,+\infty[$, on pose: $a*b=\sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}$

0.25 1) Vérifier que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$; $x^2y^2-x^2-y^2+2=(x^2-1)(y^2-1)+1$

0.5 2) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I

3) On rappelle que $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ est un groupe commutatif.

On considère l'application $\varphi:\ \mathbb{R}^{*+}\to I$
$\qquad x\mapsto\sqrt{x+1}$

0,5 a - Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ vers $(I,*)$

0.25 b - En déduire la structure de $(I,*)$

0.75 c - Montrer que l'ensemble $\Gamma=\left\{\sqrt{1+2^m}\ /\ m\in\mathbb{Z}\right\}$ est un sous groupe de $(I,*)$

EXERCICE 2 :(3.5 points) les parties I et II sont indépendantes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\right)$

I- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)\ :\ iz^2+(2-i)az-(1+i)a^2=0$ où a est un nombre complexe non nul.

0.75 1) Déterminer z_1 et z_2, les deux racines de l'équation (E)

0.25 2) a- Vérifier que : $z_1z_2=a^2(i-1)$.

0.5 b- Montrer que : z_1z_2 est un nombre réel $\Leftrightarrow$ $\arg a\equiv\frac{-3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$

II- Soient c un nombre réel non nul et z un nombre complexe non nul.

On considère les points A , B , C , D et M d'affixes respectifs 1 , $1+i$, c , ic et z

0,5 1)a- Montrer que : A, D et M sont alignés $\Leftrightarrow$ $(ic+1)z+(ic-1)\bar{z}=2ic$ (remarquer que $c=\bar{c}$)

0,5 b –Montrer que : $(AD)\perp(OM) \Leftrightarrow (ic+1)z-(ic-1)\bar{z}=0$

2) Soit h l' affixe du point H , la projection orthogonale du point O sur (AD)

0.75 a - Montrer que : $h-(1+i)=\dfrac{i}{c}(h-c)$.

0.25 b - En déduire que $(CH)\perp(BH)$

EXERCICE 3 :(3 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $143x-195y=52$

0.5 a – Déterminer le plus grand commun diviseur de 143 et 195 , puis en déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$

0.75 b – Sachant que $(-1,-1)$ est une solution particulière de l'équation (E) , résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.

2) Soit n un entier naturel non nul premier avec 5

0.5 Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$ on a : $n^{4k}\equiv 1\ [5]$

3) Soient x et y deux entiers naturels non nuls tel que $x\equiv y\ [4]$

0,5 a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $n^x\equiv n^y\ [5]$

0.5 b- En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $n^x\equiv n^y\ [10]$

0.25 4) Soient x et y deux entiers naturels tel que (x,y) est solution de l'équation (E)

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les deux nombres n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans l'écriture dans le système décimal.

EXERCICE 4 :(5.5 points)

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=x+\dfrac{e^{-x}}{n}$

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d' un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0,5 1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

0.5 2) a - Etudier la branche infinie de (C_n) au voisinage de $-\infty$.

0.5 b - Montrer que la droite (D) d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_n) au voisinage de $+\infty$, puis déterminer la position relative de (C_n) et (D)

0.75 3) Etudier les variations de f_n et dresser son tableau de variations.

0.75 4) Construire la courbe (C_3) .(On prend $f_3(-0,6)\approx 0$ et $f_3(-1,5)\approx 0$ et $\ln 3\approx 1,1$)

0.25 5) a- Montrer que pour $n\geq 3$ on a : $\frac{e}{n}<\ln n$

1 b- Montrer que pour $n\geq 3$ l'équation $f_n(x)=0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n telles que : $x_n\leq -\ln n$ et $\frac{-e}{n}\leq y_n\leq 0$

0.5 c- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$

6) On considère la fonction numérique g définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x)=-1-x\ln x \; ; \; x>0 \\ g(0)=-1 \end{cases}$

0.25 a- Montrer que la fonction g est continue à droite au point 0

0.25 b- Vérifier que pour $n\geq 3$ on a : $g\left(\frac{-1}{x_n}\right)=\frac{\ln n}{x_n}$

0.25 c- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{x_n}$

<u>EXERCICE 5</u> : (4.5points)

On considère la fonction numérique F définie sur $[0,1]$ par :

$$F(0)=1 \quad \text{et} \quad F(x)=\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+2x)}{2x^2} \quad \text{si} \quad x>0$$

0.25 1) Soit x un élément de $[0,1]$; Montrer que pour tout t de $[0,x]$ on a : $\frac{1}{1+2x}\leq\frac{1}{1+2t}\leq 1$

2) Soit x un élément de $]0,1]$

0.5 a- Montrer que $F(x)=\frac{2}{x^2}\int_0^x\frac{t}{1+2t}dt$

0.75 b -Montrer que : $\frac{1}{1+2x}\leq F(x)\leq 1$ En déduire que la fonction F est continue à droite au point 0

0.75 3) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout x de $[0,1]$ on a:

$$\int_0^x\frac{2t}{1+2t}dt=\frac{x^2}{1+2x}+2\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2dt$$

4) Soit x un élément de $]0,1]$

0.5 a- Montrer que $F'(x)=-\frac{4}{x^3}\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2dt$

0.75 b-Montrer que : $\frac{-4}{3}\leq F'(x)\leq\frac{-4}{3\,(1+2x)^2}$ (on pourra utiliser le résultat de la question 1))

0.75 c- En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction F sur $[0,x]$ montrer que $\frac{-4}{3}\leq\frac{F(x)-F(0)}{x}\leq\frac{-4}{3\,(1+2x)^2}$

0.25 d- Déduire que la fonction F est dérivable à droite en 0 en précisant son nombre dérivé a droite au point 0 .

FIN DE L'EPREUVE

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2012
عناصر الإجابة

الصفحة 1 / 1

المادة	الرياضيات	NR25	المعامل 9
الشعب(ة) أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)		مدة الإنجاز 4

Répartir la note selon les étapes de la résolution	
EXERCICE 1	**<u>3.5pts</u>**
I- 1)	Calcul de $I-A$ …….0.25pts Calcul de A^2 …….….0.5pts
2)	$A^{-1}=A+I$ ….……..0.5pts
II- 1)	Vérification……..0.25pts
2)	* Loi de compostion interne ……0.5pts
3) a)	φ homomorphisme………...0.25pts φ bijective……………....0.25pts
b)	$(I,*)$ groupe commutatif…..0.25pts
c)	Γ sous-groupe de $(I,*)$ ….. 0.75pts (0.25 pts pour $\Gamma\neq\varnothing$; 0.25pts pour Γ partie stable et 0.25pts pour l'appartenance du symétrique à Γ)
EXERCICE 2	**<u>3.5pts</u>**
I- 1)	Détermination des deux racines….0.75pts
2) a)	Vérification de $z_1z_2=a^2(i-1)$ ….0.25pts
b)	$\arg a\equiv\dfrac{-3\pi}{8}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]\Leftrightarrow z_1z_2\in\mathbb{R}$ ……0.5pts
II- 1) a)	$A, D et M$ $sont\ alignés \Leftrightarrow (ic+1)z+(ic-1)\overline{z}=2ic$ …..0.5pts
b)	$(AD)\perp(OM)\Leftrightarrow(ic+1)z-(ic-1)\overline{z}=0$ ……. 0.5pts
2) a)	$h-(1+i)=\dfrac{i}{c}(h-c)$……. 0.75pts
b)	$(CH)\perp(BH)$ ……0.25pts
EXERCICE 3	**<u>3pts</u>**
1) a)	Détermination du PGCD……0.25pts Existence des solutions de (E) …..0.25pts
b)	Résolution de l'équation (E)…0.75pts (dont 0.25pts pour les étapes de la résolution)

2)	$n^{4k} \equiv 1[5]$ ……0.5pts
3) a)	$n^x \equiv n^y[5]$ ……0.5pts (dont 0.25pts pour le cas $n \equiv 0[5]$)
b)	$n^x \equiv n^y[10]$ 0.5pts (dont 0.25pts pour $n^x \equiv n^y[2]$)
4)	les nombres n^x et n^y ont le même chiffre des unités …0.25pts
EXERCICE 4	**5.5pts**
1)	Calcul des deux limites ….0.5pts (0.25pts pour chaque limite)
2) a)	Branche infinie au voisinage de $-\infty$….0.5pts
b)	Asymptote oblique …..0.25pts Position relative …….0.25pts
3)	Calcul de $f_n'(x)$ ………..…0.25pts Variations de f_n ………..…0.25pts Tableau des variations de f_n ….0. 25pts
4)	Construction de la courbe (C_3) ….0.75pts
5) a)	$\frac{e}{n} < \ln n$ ……………………0.25pts
b)	Existence et unicité de x_n ……..0.25pts Existence et unicité de y_n ……..0.75pts
c)	$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$…..0.5pts (0.25pts pour chaque limite)
6) a)	Continuité de g à droite en 0 ……...0.25pts
b)	Vérification………………………0.25pts
c)	Déduction de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{x_n} = -1$ ….0.25pts
EXERCICE 5	**4.5pts:**
1)	Les deux inégalités ……………….0.25pts
2) a)	$F(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt$ ……………………..…0.5pts
b)	$\forall x \in]0,1]$, $\frac{1}{1+2x} \le F(x) \le 1$ ……………..0.5pts Déduction de la continuité de F à droite en 0…..0.25pts
3)	Utilisation de l'intégration par parties…………...0.75pts
4) a)	Calcul de $F'(x)$ ………………………….....0.5pts
b)	Encadrement de $F'(x)$ ……………………..…0.75pts
c)	$\frac{-4}{3} \le \frac{F(x)-F(0)}{x} \le \frac{-4}{3}\frac{1}{(1+2x)^2}$ …………………0.75pts
d)	Dérivabilité de F à droite en 0 …………...0.25pts