الإمتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريا الدورة العادية 2011	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي المركز الوطني للتقويم و الإمتحانات	مادة الرياضيات مسلك العلوم الرياضية أ و ب المعامل 9 مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,0 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان

(I) في الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ نعتبر المصفوفتين $\mathbb{A}$ و $\mathbb{I}$ المعرفتين بما يلي :

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0\\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{-\sqrt2}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbb{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

نضع : $\mathbb{A}^0=\mathbb{I}$ و $\mathbb{A}^1=\mathbb{A}$ و $\mathbb{A}^2=\mathbb{A}\times\mathbb{A}$ و $\forall n\in\mathbb{N}: \mathbb{A}^{n+1}=\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}$

0,50 ن — ① بين أن : $\forall k\in\mathbb{N}:\ \mathbb{A}^{2k}=\mathbb{I}$

0,50 ن — ② بين أن المصفوفة $\mathbb{A}$ تقبل مقلوبا $\mathbb{A}^{-1}$ ينبغي تحديده.

(II) ليكن α عددا حقيقيا موجبا قطعا .

لكل x و y من المجال $I=]\alpha,+\infty[$ نضع : $x*y=(x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha$

0,50 ن — ① أ) بين أن : $*$ قانون تركيب داخلي في I

0,50 ن — ب) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي

0,50 ن — ج) بين أن المجموعة $(I,*)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده

0,50 ن — ② بين أن المجموعة $(I,*)$ زمرة تبادلية

③ نعتبر التطبيق :

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \qquad x \longmapsto \frac{1}{x-\alpha}$$

0,50 ن — أ) بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ إلى $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

0,50 ن — ب) حل في المجموعة I المعادلة : $x^{(3)}=\alpha^3+\alpha$ بحيث : $x^{(3)}=x*x*x$

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن N العدد الصحيح الطبيعي الممثل في نظمة العد العشري بما يلي : $N=\underbrace{111\ldots11}_{\text{2010 مرة 1}}$

0,25 ن — ① بين أن N يقبل القسمة على العدد 11

0,75 ن — ② أ) تحقق أن العدد 2011 أولي , و أن : $10^{2010}-1=9N$

0,50 ن — ب) بين أن العدد 2011 يقسم العدد $9N$

0,50 ن — ج) استنتج أن العدد 2011 يقسم العدد N .

0,50 ن — ③ بين أن العدد N يقبل القسمة على العدد 22121 .

التمرين الثالث : (3,5 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان

(I) ليكن m عددا عقديا غير منعدم . نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E_m):\ z^2+[(1-i)m-4]z-im^2-2(1-i)m+4=0$$

0,50 ن — ① تحقق أن العدد $z_1=2-m$ حل للمعادلة (E_m) .

② ليكن z_2 الحل الثاني للمعادلة (E_m) .

0,50 ن — أ) بين أن $z_1z_2=1 \ \Leftrightarrow\ im^2+2(1-i)-3=0$

1,00 ن — ب) حدد قيمتي m بحيث $z_1z_2=1$

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\mathcal{O},\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر التطبيق $\mathcal{S}$ الذي يربط النقطة M التي لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z' بحيث : $z'=-(z-1)+1$

و الدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه النقطة Ω ذات اللحق $(1+i)$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ و ليكن z'' لحق النقطة M'' صورة M بالدوران $\mathcal{R}$.

0,25 ن — ① أ) بين أن التطبيق $\mathcal{S}$ هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة ذات اللحق 1

0,25 ن — ب) بين أن : $z''=iz+2$.

② نفترض أن النقطة M تخالف O أصل المعلم و لتكن A النقطة التي لحقها 2

0,50 ن — أ) أحسب $\frac{z''-2}{z'-2}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $AM'M''$

0,50 ن — ب) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة.

التمرين الرابع : (6,5 ن)

(I) دراسة الحلول الموجبة للمعادلة $(E):\ e^x=x^n$ بحيث $n\in\mathbb{N}^*$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة : $\mathcal{D}=[0,1[\cup]1,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\ln x}\ ;x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O},\vec{i},\vec{j})$.

0,25 ن — ① تحقق أنه لكل x من المجموعة $]0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا : $\left(e^x=x^n \Leftrightarrow n=f(x)\right)$.

0,50 ن — ② بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0.

1,50 ن — ③ أحسب النهايات التالية ثم أوّل هندسيا النتائج المحصل عليها :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\ \text{و}\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\ \text{و}\ \lim_{x\to1^+}f(x)\ \text{و}\ \lim_{x\to1^-}f(x)$$

0,75 ن — ④ أدرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$ ثم إعط جدول تغيراتها.

0,50 ن — ⑤ بين أن $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج احداثيتيها.

0,50 ن — ⑥ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$

0,50 ن — ⑦ بين أنه إذا كان $n\geq 3$ فإن المعادلة (E) تقبل بالضبط حلين اثنين α_n و b_n بحيث $1<\alpha_n<e<b_n$.

(II) دراسة تقارب المتتاليتين $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ و $(b_n)_{n\geq 3}$.

0,50 ن ① بين أن $(\forall n \geq 3):\ b_n \geq n$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(b_n)_{n\geq 3}$

0,50 ن ② ⓐ بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .

0,50 ن ⓑ بين أن $(\forall n \geq 3):\ \frac{1}{n} < ln(\alpha_n) < \frac{e}{n}$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 3}$.

0,50 ن ⓒ بين أن : $\lim_{n\to+\infty} (\alpha_n)^n = e$

التمرين الخامس: (3,5 ن)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\boxed{F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt}$$

0,50 ن ① ⓐ بين أن : $(\forall x \geq 0):\ 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$.

0,50 ن ⓑ بين أن : $(\forall x \geq 1):\ e^{-x^2} \leq e^{-x}$ ثم استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$.

0,50 ن ② بين أن : F قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$ و أن : $(\forall x \geq 0):\ F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$.

③ نعتبر الدالة العددية G المعرفة على $[0,\frac{\pi}{2}]$ بما يلي :

$$\boxed{\begin{cases} G(x) = F(\tan x) \\ G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}}$$

0,25 ن ⓐ بين أن الدالة G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$.

0,75 ن ⓑ بين أنه يوجد عدد حقيقي c ينتمي إلى المجال $]0,+\infty[$ بحيث : $F'(c) = 0$ و أن $F(c) = \frac{1}{2c}e^{-2c^2}$.

(يمكن تطبيق مبرهنة رول بالنسبة للدالة G على المجال $[0,\frac{\pi}{2}]$)

④ نعتبر الدالة العددية H المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $H(x) = F'(x)\frac{e^{x^2}}{2x}$

0,50 ن ⓐ بين أن الدالة H تناقصية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

0,50 ن ⓑ استنتج أن العدد c وحيد ثم إعط جدول تغيرات الدالة F .

الإمتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية 2011

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 9
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,5 ن)

لكل x و y من المجال $I=]0,1[$ نضع : $x*y=\dfrac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$

① (أ) بين أن $(*)$ قانون تركيب داخلي في I . 0,50 ن
(ب) بين أن القانون $(*)$ تبادلي و تجميعي . 0,50 ن
(ج) بين أن $(I,*)$ يقبل عنصرا محايدا ينبغي تحديده. 0,50 ن

② بين أن $(I,*)$ زمرة تبادلية. 0,50 ن

③ نعتبر المجموعتين : $\mathbb{H}=\{\ 2^n\ /\ n\epsilon\mathbb{Z}\}$ و $\mathbb{K}=\left\{\dfrac{1}{2^n+1}\ /\ n\epsilon\mathbb{Z}\right\}$

(أ) بين أن $\mathbb{H}$ زمرة جزئية للزمرة $\left(\mathbb{R}_+^*,\times\right)$. 0,50 ن
(ب) نعتبر التطبيق φ المعرف بما يلي : 0,50 ن

$$\varphi:\ \mathbb{H}\longrightarrow I,\qquad x\longrightarrow\frac{1}{x+1}$$

بين أن التطبيق φ تشاكل من $(\mathbb{H},\times)$ إلى $(I,*)$

(ج) استنتج أن $(\mathbb{K},*)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$. 0,50 ن

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن x عددا صحيحا طبيعيا يحقق $10^x\equiv 2[19]$.

① (أ) تحقق أن : $10^{x+1}\equiv 1[19]$. 0,25 ن
(ب) بين أن : $10^{18}\equiv 1[19]$. 0,50 ن

② ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و $(x+1)$.
(أ) بين أن : $10^d\equiv 1[19]$. 0,75 ن
(ب) بين أن : $d\equiv 18$. 0,50 ن
(ج) استنتج أن : $x\equiv 17[18]$. 0,50 ن

التمرين الثالث : (4,0 ن)

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E):\ z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=0$$

① بين أن العدد $-2i$ حل للمعادلة (E) . 0,50 ن

② حدد العددين العقديين α و β بحيث : 0,50 ن

$$(\forall z\epsilon\mathbb{C}):\ z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta)$$

③ (أ) حدد الجذرين المربعين للعدد $(5-12i)$. 0,50 ن
(ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . 0,50 ن

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\mathcal{O},\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=-1+3i$ و $b=-2i$ و $c=2+i$.

① بين أن ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في النقطة C. — 0,50 ن

② نعتبر الدوران $\mathcal{R}_1$ الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و الدوران $\mathcal{R}_2$ الذي مركزه A و زاويته $\frac{-2\pi}{3}$.

لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها z و M_1 صورتها بالدوران $\mathcal{R}_1$ و M_2 صورتها بالدوران $\mathcal{R}_2$.

(أ) تحقق أن الصيغة العقدية للدوران $\mathcal{R}_1$ هي : $z_1=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i$ — 0,50 ن

(ب) حدد z_2 لحق M_2 بدلالة z . — 0,50 ن

(ج) استنتج أن النقطة I منتصف القطعة $[M_1M_2]$ **نقطة ثابتة .** — 0,50 ن

التمرين الرابع : (6,0 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $\boxed{f(x)=x+\ln x}$.

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O},\vec{i},\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\text{cm})$

① أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ — 1,00 ن

② (أ) ضع جدول تغيرات الدالة f . — 0,50 ن

(ب) بين أن الدالة f تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي f^{-1} . — 0,75 ن

③ أحسب : $f(1)$ و $f(e)$ ثم أنشئ $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}^{-1})$ منحنى الدالة f^{-1} في نفس المعلم $(\mathcal{O},\vec{i},\vec{j})$. — 0,50 ن

④ (أ) أحسب التكامل : $\int_1^{e+1}f^{-1}(x)dx$ (يمكن أن تضع $t=f^{-1}(x)$) — 0,50 ن

(ب) استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\mathscr{C}^{-1})$ و المستقيمات : $x=1$ و $x=e+1$ و $y=x$. — 0,50 ن

⑤ نعتبر المعادلة : $x+\ln x=n$: (E_n) .

(أ) بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا x_n . — 0,25 ن

(ب) حدد قيمة x_1 ثم بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$ — 0,50 ن

⑥ (أ) بين أن $f(x_n)\le f(n)$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$ ثم استنتج أن $x_n\le n$: $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$. — 0,50 ن

(ب) بين أن $n-\ln n\le x_n$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$. — 0,50 ن

(ج) أحسب النهايتين التاليتين: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n-n}{n}\right)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n}{n-\ln n}\right)$ — 0,50 ن

التمرين الخامس : (4,5 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

0,50 ن	① بين أنه من أجل $n \geq 2$ يوجد عدد حقيقي و حيد α_n من المجال $]0,1[$ بحيث : $f_n(\alpha_n) = 0$.
0,75 ن	② بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة (نضع : $\ell = \lim_{+\infty}(\alpha_n)$)
0,50 ن	③ أ تحقق أنه من أجل $t \neq 1$ لدينا : $1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$
0,50 ن	ب استنتج أن : $\alpha_n + \frac{(\alpha_n)^2}{2} + \frac{(\alpha_n)^3}{3} + \cdots + \frac{(\alpha_n)^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}dt$
0,50 ن	④ أ بين أن : $1 + \ln(1-\alpha_n) = -\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}dt$
0,50 ن	ب بين أن : $(\forall n \geq 2) \; : \quad 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$
0,50 ن	ج استنتج أن : $\boxed{\ell = 1 - e^{-1}}$