المــــادة:	الرياضيات	المعامل:	9
الشعــــب(ة) أو المسلك :	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	مدة الإنجاز:	4

يسمح استعمال الآلة الحاسبة

التمرين الأول : (3 نقط)

نذكر أن $\left(M_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ حلقة واحدية وحدتها المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و أن $\left(M_2(\mathbb{R}),+,\bullet\right)$ فضاء متجهي حقيقي .

لتكن V مجموعة المصفوفات $M_{(a,b)}=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}$ حيث $(a;b)\in IR^2$

0,75 1- بين أن V فضاء متجهي جزئي من $\left(M_2(\mathbb{R}),+,\bullet\right)$ وحدد أساسا له .

0,25 2-أ)بين أن V جزء مستقر من $\left(M_2(\mathbb{R}),\times\right)$

0,5 ب) بين أن $(V,+,\times)$ حلقة واحدية تبادلية .

0,25 3-أ)احسب $M_{\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right)}\times M_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}$

0,25 ب) هل الحلقة $(V,+,\times)$ جسم؟

4- لتكن X مصفوفة من V حيث : $X=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}$ مع $(a,b)\in IR^2$

0,5 أ) بين أن : $X^2-2aX+(a^2-4b^2)I=O$ حيث , O هي المصفوفة المنعدمة .

0,5 ب) نفترض أن : $a^2-4b^2\neq 0$

بين أن المصفوفة X تقبل مقلوبا في V ينبغي تحديده.

التمرين الثاني : (4 نقط)

ليكن u عددا عقديا يخالف $(1-i)$

0,25 1) أ ــ أنشر $(iu-1-i)^2$

0,75 ب ــ حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$z^2-2(u+1-i)z+2u^2-4i=0$$

2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر.

نعتبر النقط $A((1+i)u-2i)$ و $B((1-i)u+2)$ و $U(u)$ و $\Omega(2-2i)$

0,5 أ ــ حدد لحق النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ ثم حدد متجهة الإزاحة t التي تحول النقطة U إلى النقطة I

0,5 ب ــ ليكن R الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. بين أن $R(A)=B$

ج – استنتج أن (ΩI) و (AB) متعامدان. 0,5

د – انطلاقا من النقطة U وضح طريقة لإنشاء النقطتين A و B 0,75

3) نضع $u = a(1+i) - 2i$ حيث $(a \in \mathbb{R})$

أ)حدد لحقي المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AU}$ بدلالة a 0,5

ب) استنتج أن النقط A و B و U مستقيمية. 0,25

التمرين الثالث : (3 نقط)

n عدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 4 .

لدينا ثلاث صناديق U_1 و U_2 و U_3 .

الصندوق U_1 يحتوي على كرة حمراء واحدة و $(n-1)$ كرة سوداء.

الصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و $(n-2)$ كرة سوداء.

الصندوق U_3 يحتوي على ثلاث كرات حمراء و $(n-3)$ كرة سوداء.

نعتبر التجربة العشوائية التالية: نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاثة ثم نسحب تآنيا كرتين من الصندوق الذي وقع عليه الاختيار.

ليكن X المتغير العشوائي الحقيقي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

1-حدد قيم المتغير العشوائي X 0,25

2- أ) بين أن احتمال الحدث $(X=2)$ يساوي $\dfrac{8}{3n(n-1)}$ 0,75

ب) بين أن احتمال الحدث $(X=1)$ يساوي $\dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$ 0,75

ج) استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي X 0,5

3-علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما هو احتمال أن يكون السحب قد تم من الصندوق U_3 ؟ 0,75

مسألة:(10 نقط)

I – نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $g(x) = 2(1-e^{-x}) - x$

1) أ – ادرس تغيرات الدالة g 0,5

ب – ضع جدول تغيرات الدالة g 0,5

2) أ – بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]\ln 4, \ln 6[$ 0,5

(نأخذ $\ln 2 \approx 0,7$ و $\ln 3 \approx 1,1$)

ب – ادرس إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^+$ 0,5

3) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 2(1-e^{-u_n})$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ – بين أن $1 \le u_n < \alpha$ لكل n من $\mathbb{N}$ 0,5

ب – بين أن $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$ 0,25

ج ـ بين أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا . 0,25

د ـ بين أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ 0,5

II ـ نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{1-e^x}{x^2}$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 1

2) أ ـ تحقق أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$ 0,5

ب ـ بين أن $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{x^3}$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f 0,75

3) أنشئ (C) (نأخذ $\alpha\approx 1,5$) 0,5

III ـ نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$(\forall x>0)\quad F(x)=\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}\,dt \quad \text{و} \quad F(0)=-\ln 2$$

1) أ ـ باستعمال مكاملة بالأجزاء , بين أن: $(\forall x>0)\ F(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2x}-\dfrac{e^x-1}{x}-\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt$ 0,5

ب ـ بين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $e^x\ln 2\leq\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt\leq e^{2x}\ln 2$ 0,5

ج ـ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt$ ثم استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في الصفر . 0,5

2) أ ـ بين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $F(x)\leq\dfrac{1-e^x}{2x}$ 0,25

ب ـ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 0,25

3) بين أن F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و أن : $(\forall x>0)\ F'(x)=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^2$ 0,5

4) أ- ليكن x من المجال $]0,+\infty[$.	
بين أنه يوجد c من المجال $]0,x[$ بحيث: $F(x)-F(0)=-\frac{1}{2}xe^{2c}$ (يمكنك استعمال مبرهنة التزايدات المنتهية مرتين)	0,75
ب ـ أثبت أن لكل x من $]0,+\infty[$: $-\frac{1}{2}e^{2x}\leq\frac{F(x)-F(0)}{x}\leq-\frac{1}{2}$	0,25
ج- استنتج أن F قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر و أن $F_d'(0)=-\frac{1}{2}$	0,25

التمرين الأول : (3 نقط)

تذكير :

✓ $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ حلقة واحدية وحدتها المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

✓ $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,.\right)$ فضاء متجهي حقيقي.

نضع $V=\left\{ M_{(a,b)}=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix} \ / \ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \right\}$

1. (*) لدينا :

✓ $V\neq\varnothing$ ، لأن : $O=M_{(0,0)}\in V$.

✓ $V\subset\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

✓ لكل عنصرين $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ من V ولكل (α,β) من $\mathbb{R}^2$ ، لدينا :

$$\alpha M_{(a,b)}+\beta M_{(c,d)}=\begin{pmatrix}\alpha a+\beta c&\alpha b+\beta d\\4(\alpha b+\beta d)&\alpha a+\beta c\end{pmatrix}=M_{(\alpha a+\beta c,\alpha b+\beta d)}\in V$$

ومنه فإن V فضاء متجهي جزئي من $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,.\right)$.

(*) لكل عنصر $M_{(a,b)}$ من V ، لدينا : $M_{(a,b)}=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\4&0\end{pmatrix}=aI+bJ$ ، حيث :

$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=M_{(1,0)}\in V$ و $J=\begin{pmatrix}0&1\\4&0\end{pmatrix}=M_{(0,4)}\in V$. إذن (I,J) أسرة مولدة للفضاء V .

لكل (α,β) من $\mathbb{R}^2$ ، لدينا : $\alpha I+\beta J=O\Rightarrow\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\4\beta&\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\alpha=\beta=0$. إذن (I,J) أسرة حرة في V . وبالتالي فإن (I,J) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(V,+,.)$. (بعده $\dim V=2$)

2. أ- ليكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ عنصران من V. لدينا :

$$M_{(a,b)}\times M_{(c,d)}=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c&d\\4d&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac+4bd&ad+bc\\4(ad+bc)&ac+4bd\end{pmatrix}=M_{(ac+4bd,ad+bc)}\in V$$

إذن V جزء مستقر من $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\times\right)$.

2. ب- لدينا :

✓ $(V,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي. إذن $(V,+,.)$ زمرة تبادلية.

✓ $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ حلقة ، إذن $\times$ تجميعي وتوزيعي على $+$ في $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ و بما أن V جزء مستقر من $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\times\right)$ ، فإن $\times$ تجميعي وتوزيعي على $+$ في V.

✓ I هي وحدة الحلقة $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ و $I=M_{(1,0)}\in V$ ، إذن I هي وحدة V.

✓ $M_{(a,b)}\times M_{(c,d)}=M_{(ac+4bd,ad+bc)}=M_{(ca+4db,da+cb)}=M_{(c,d)}\times M_{(a,b)}$. إذن $\times$ قانون تبادلي في V.

خلاصة : $(V,+,\times)$ حلقة واحدية تبادلية.

3. أ- لدينا : $M_{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)}\times M_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}=M_{\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+4\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{4}\,,\,\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{2}\right)}=M_{(0,0)}=O$.

ب- لدينا : $M_{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)}\times M_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}=O$ و $M_{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)}\neq O$ و $M_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}\neq O$. إذن $(V,+,\times)$ حلقة غير كاملة لاحتوائها على قواسم الصفر ، ومنه فإن الحلقة $(V,+,\times)$ ليست جسما.

4. لتكن X مصفوفة من V حيث $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a\end{pmatrix}$ مع $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

أ- لدينا :

$$\begin{aligned}X^2-2aX+\left(a^2-4b^2\right)I &= M_{(a,b)}^2-2aM_{(a,b)}+\left(a^2-4b^2\right)M_{(1,0)}\\ &= M_{(a^2+4b^2,2ab)}-M_{(2a^2,2ab)}+M_{(a^2-4b^2,0)}\\ &= M_{(0,0)}\\ &= O\end{aligned}$$

ب- نفترض أن $a^2-4b^2\neq 0$. إذن : $X^2-2aX+\left(a^2-4b^2\right)I=O \Rightarrow \frac{1}{a^2-4b^2}(2aI-X)X=I$.

ولدينا : $\frac{1}{a^2-4b^2}(2aI-X)=\frac{1}{a^2-4b^2}\left(2aM_{(1,0)}-M_{(a,b)}\right)=M_{\left(\frac{a}{a^2-4b^2},\frac{-b}{a^2-4b^2}\right)}\in V$.

إذن X تقبل مقلوبا في $(V,+,\times)$ هو : $\boxed{X^{-1}=\frac{1}{a^2-4b^2}(2aI-X)=M_{\left(\frac{a}{a^2-4b^2},\frac{-b}{a^2-4b^2}\right)}}$.

التمرين الثاني :

ليكن u عددا عقديا مخالفا للعدد $1-i$.

1. أ- $(iu-1-i)^2=-u^2+2(1-i)u+2i$.

ب- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(*):\quad z^2-2(u+1-i)z+2u^2-4i=0$.

لنحسب المميز المختصر للمعادلة $(*)$. حسب السؤال أعلاه ، لدينا :

$$\Delta'=(u+1-i)^2-\left(2u^2-4i\right)=-u^2+2(1-i)u+2i=(iu-1-i)^2$$

إذن للمعادلة $(*)$ حلين مختلفين هما : $z_1=u+1-i+iu-1-i=\boxed{(1+i)u-2i}$

و $z_2=u+1-i-iu+1+i=\boxed{2+(1-i)u}$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة $(*)$ هي : $S=\left\{(1+i)u-2i\ ,\ 2+(1-i)u\right\}$.

2. في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر ، نعتبر النقط $A\left((1+i)u-2i\right)$ و $B\left((1-i)u+2\right)$ و $U(u)$ و $\Omega(2-2i)$.

أ- لدينا I منتصف القطعة $[AB]$. إذن لحق النقطة I هو :

$$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{(1+i)u-2i+(1-i)u+2}{2}=\boxed{1-i+u}$$

t هي الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ التي تحول النقطة U إلى النقطة I. لنحدد لحق المتجهة $\vec{u}$. لدينا :

$z_{\vec{u}}=z_I-z_U=1-i+u-u=\boxed{1-i}$. إذن : $\vec{u}(1,-1)$.

ب- الكتابة العقدية للدوران R الذي مركزه $\Omega(2-2i)$ وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ هي : $z'=e^{-i\frac{\pi}{2}}z+\left(1-e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)z_\Omega$. أي :

$z'=-iz+(1+i)(2-2i)$. يكافئ $\boxed{z'=-iz+4}$.

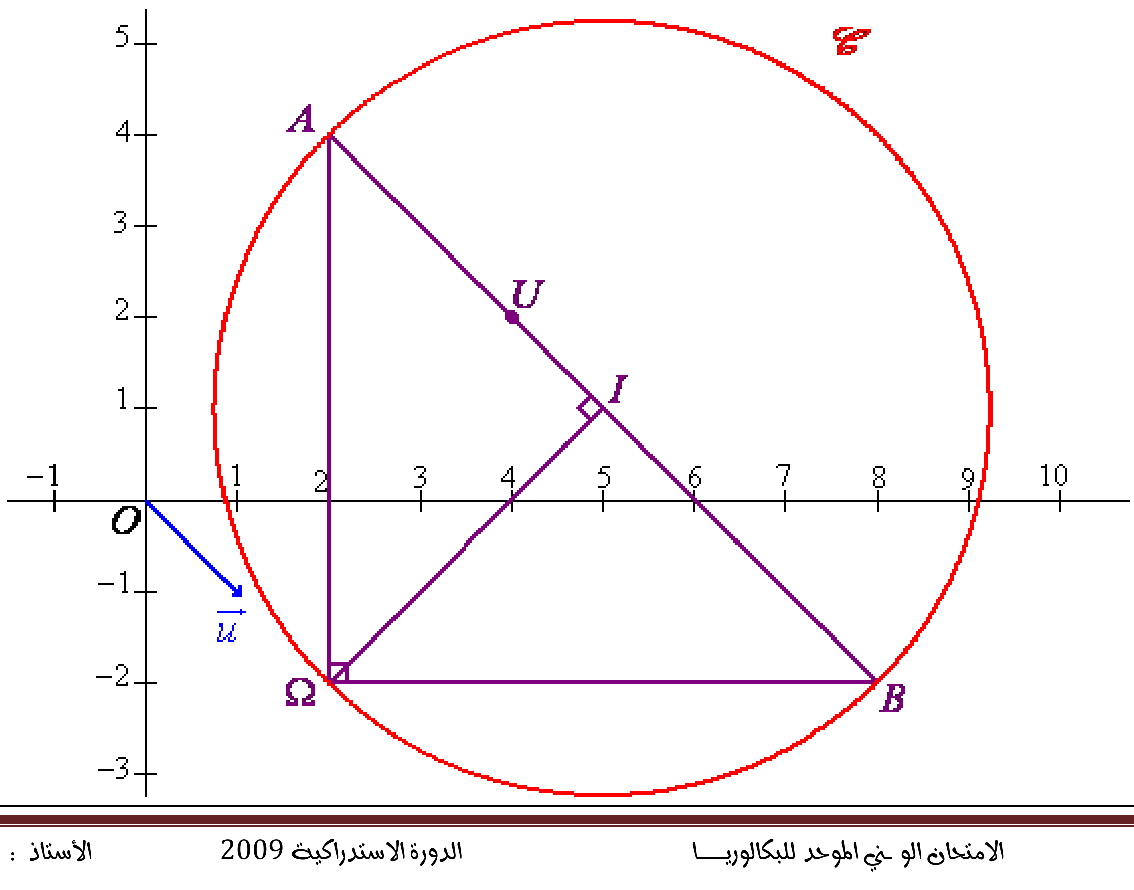
وبما أن $-iz_A+4=-i\left((1+i)u-2i\right)+4=(1-i)u+2=z_B$ ، فإن $\boxed{R(A)=B}$.

جـ- لدينا $R\left(\Omega,-\frac{\pi}{2}\right)(A)=B$. إذن : $\left(\overline{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ و $\Omega A=\Omega B$. ومنه فإن ΩAB مثلث قائم الزاوية في Ω ولدينا I منتصف القطعة $[AB]$. $\boxed{(\Omega I)\perp(AB)}$.

د- إنشاء النقطتين A و B انطلاقا من النقطة U :

- ✓ لدينا : $t(U)=I$ ، هكذا ننشئ النقطة I بحيث : $\overrightarrow{UI}=\vec{u}$.
- ✓ بما أن $(\Omega I)\perp(AB)$ ، فإن النقطتين A و B تنتميان إلى المستقيم (Δ) المار من النقطة I و العمودي على المستقيم (ΩI).
- ✓ بما أن ΩAB مثلث قائم الزاوية في Ω و I منتصف القطعة $[AB]$، فإن I هو مركز الدائرة $\mathscr{C}$ المحيطة بالمثلث ΩAB. إذن A و B هما نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) والدائرة $\mathscr{C}$. ويتم اختيار النقطتين A و B بحيث يكون ΩAB مثلثا غير مباشر $\left(\left(\overline{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right)$.

إنشاء الشكل في حالة $U(4+2i)$:



3. نضع : $u=a(1+i)-2i$ حيث $(a\in\mathbb{R})$.

أ- لنحدد لحقي المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AU}$ بدلالة a :

$$Aff\left(\overrightarrow{AB}\right)=z_B-z_A=(1-i)u+2-(1+i)u+2i=\boxed{2(1-i)(a-1)}$$

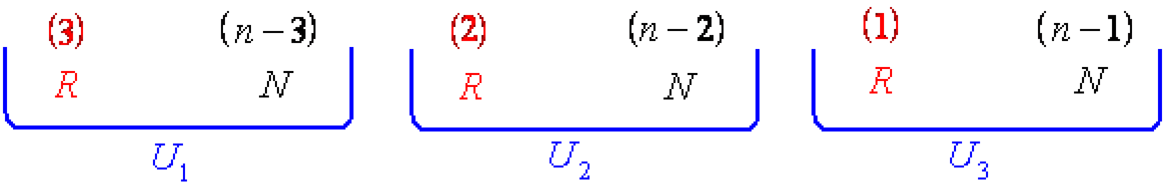
$$Aff\left(\overrightarrow{AU}\right)=z_U-z_A=a(1+i)-2i-(1+i)u+2i=\boxed{(1-i)(a-2)}$$

ب- بما أن $u\neq 1-i$ ، فإن : $a\neq 1$. إذن : $Aff\left(\overrightarrow{AU}\right)=Aff\left(\dfrac{a-2}{2(a-1)}\overrightarrow{AB}\right)$ ، ومنه فإن :

$\overrightarrow{AU}=\dfrac{a-2}{2(a-1)}\overrightarrow{AB}$ ، وبالتالي فإن النقط A و B و U مستقيمية .

التمرين الثالث :

ليكن $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 4$.



نعتبر التجربة العشوائية التالية : نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاثة، ثم نسحب تآنيا كرتين من الصندوق الذي وقع عليه الاختيار.
ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

1. القيم التي يأخذها المتغير العشوائي هي 0 و 1 و 2 ولدينا مجموعة القيم كما يلي : $X(\Omega)=\{0,1,2\}$.

2. نعتبر الأحداث التالية : A_i: « اختيار الصندوق U_i » ، حيث $1\leq i\leq 3$.

لدينا A_1 و A_2 و A_3 أحداث غير منسجمة مثنى مثنى واتحادها Ω ، فهي تكون تجزيئا للفضاء Ω .
حسب صيغة الاحتمالات الكلية ، لدينا :

أ- $$p(X=2)=p(A_1)p_{A_1}(X=2)+p(A_2)p_{A_2}(X=2)+p(A_3)p_{A_3}(X=2)$$

$$=\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{C_2^2}{C_n^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_3^2}{C_n^2}$$

$$\boxed{p(X=2)=\frac{8}{3n(n-1)}}$$

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}\;;\;C_2^2=1\;;\;C_3^2=3$$

ب- لدينا : $$p(X=1)=p(A_1)p_{A_1}(X=1)+p(A_2)p_{A_2}(X=1)+p(A_3)p_{A_3}(X=1)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{C_1^1C_{n-1}^1}{C_n^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_2^1C_{n-2}^1}{C_n^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_3^1C_{n-3}^1}{C_n^2}$$

$$\boxed{p(X=1)=\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}}$$

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}\;;\;C_{n-1}^1=n-1\;;\;C_{n-2}^1=n-2\;;\;C_1^1=1\;;\;C_2^1=2\;;\;C_3^1=3$$

جـ- لدينا : $\boxed{\dfrac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}} = p(X=0) = 1 - p(X=1) - p(X=2) = 1 - \dfrac{8}{3n(n-1)} - \dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$.

ومنه نستنتج قانون احتمال X كما يلي :

قيم X : x_k	0	1	2
$p_k = p(X = x_k)$	$\dfrac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}$	$\dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$	$\dfrac{8}{3n(n-1)}$

3. علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين ، احتمال أن يكون السحب قد تم من الصندوق U_3 هو : $p_{(X=2)}(A_3)$.

حسب صيغة الاحتمالات المركبة ، لدينا :

$$p(X=2)\,p_{(X=2)}(A_3) = p(A_3)\,p_{A_3}(X=2) \Rightarrow \frac{8}{3n(n-1)}\,p_{(X=2)}(A_3) = \frac{1}{3}\frac{C_3^2}{C_n^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_{(X=2)}(A_3) = \frac{3}{4}}$$

المسألـــــــــة :

I. لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ , \ g(x) = 2(1-e^{-x}) - x$.

1. أ- لكل x من $\mathbb{R}^+$ ، لدينا : $g'(x) = 2(1-e^{-x})' - x' = 2e^{-x} - 1$ ، ولدينا :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \ln 2 .$$

إذن : $\forall x \in [0, \ln 2] \ , \ g'(x) \geq 0$ و $\forall x \in [\ln 2, +\infty[\ , \ g'(x) \leq 0$.

ب- تغيرات الدالة g :

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2(1-e^{-x}) - x = -\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. إذن :

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$1-\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

2. أ- بما أن g دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $[\ln 4, \ln 6]$ و $g(\ln 4) = \dfrac{3}{2} - 2\ln 2 \approx 0,1$ و $g(\ln 6) = \dfrac{5}{3} - \ln 6 = \dfrac{5}{3} - \ln 3 - \ln 2 \approx -0,14$ و $g(\ln 4) \times g(\ln 6) < 0$ ، فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية ، المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]\ln 4, \ln 6[$.

ب- g دالة تناقصية على المجال $[\ln 2, +\infty[$. إذن : $\forall x \in]\alpha, +\infty[\ , \ x > \alpha \Rightarrow g(x) < g(\alpha) \Rightarrow g(x) < 0$

و $\forall x \in [\ln 2, \alpha[\ , \ x < \alpha \Rightarrow g(x) > g(\alpha) \Rightarrow g(x) > 0$

g دالة تزايدية على المجال $\left[0,\ln 2\right]$.إذن : $\forall x\in\left]0,\ln 2\right]\ ,\ \ln 2\geq x>0\Rightarrow g(x)>g(0)\Rightarrow g(x)>0$

خلاصة : $\forall x\in\left]0,\alpha\right[\ ,\ g(x)>0$ و $\forall x\in\left]\alpha,+\infty\right[\ ,\ g(x)<0$ و $g(0)=g(\alpha)=0$.

3. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=2\left(1-e^{-u_n}\right)\quad ,\quad n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

أ- لدينا :

✓ من أجل $n=0$ ، $u_0=1$ ، إذن : $1\leq u_0<\alpha$ ، لأن : $1=\ln e<\ln 4<\alpha$.

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$. نفترض أن $1\leq u_n<\alpha$ ونبين أن $1\leq u_{n+1}<\alpha$:

$$\begin{aligned} 1\leq u_n<\alpha &\Rightarrow -\alpha<-u_n\leq -1 \\ &\Rightarrow e^{-\alpha}<e^{-u_n}\leq e^{-1} \\ &\Rightarrow 1-e^{-1}\leq 1-e^{-u_n}<1-e^{-\alpha} \\ &\Rightarrow 2\left(1-e^{-1}\right)\leq 2\left(1-e^{-u_n}\right)<2\left(1-e^{-\alpha}\right) \\ &\Rightarrow 1\leq u_{n+1}<\alpha \end{aligned}$$

لأن : $\boxed{2\left(1-e^{-\alpha}\right)=\alpha}$ $g(\alpha)=0\Rightarrow 2\left(1-e^{-\alpha}\right)-\alpha=0\Rightarrow$ و $g(1)\geq 0\Rightarrow 2\left(1-e^{-1}\right)\geq 1$.

✓ خلاصة : $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ 1\leq u_n<\alpha$.

ب- ليكن $n\in\mathbb{N}$. لدينا : $u_{n+1}-u_n=2\left(1-e^{-u_n}\right)-u_n=g(u_n)$.

جـ- ليكن $n\in\mathbb{N}$. لدينا : $u_n\in\left[1,\alpha\right[$. إذن $g(u_n)>0$ ، ومنه فإن : $u_{n+1}-u_n>0$. و هذا يعني أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية.

د- لدينا : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد α. إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها l ينبغي تحديدها ؟

نضع : $\forall x\in\mathbb{R}^+\ ,\ h(x)=2\left(1-e^{-x}\right)$. لدينا :

✓ h دالة متصلة على المجال $\left[1,\alpha\right]$.

✓ $\forall x\in\left[1,\alpha\right]\ ,\ h'(x)=2\left(1-e^{-x}\right)'=2e^{-x}>0$. إذن h تزايدية قطعا على $\left[1,\alpha\right]$ ، ومنه فإن :

$h\left(\left[1,\alpha\right]\right)=\left[h(1),h(\alpha)\right]\subset\left[1,\alpha\right]$ ، لأن : $h(\alpha)=\alpha$ و $g(1)\geq 0\Rightarrow 1\leq h(1)$.

✓ $u_0=1\in\left[1,\alpha\right]$

✓ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها l.

إذن : $h(l)=l$ و $l\in\left[1,\alpha\right]$. حسب السؤال I.2.ب. ، لدينا : $l=\alpha$. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha}$.

II. نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{1-e^x}{x^2}$.

1. حساب نهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}\left(e^{-x}-1\right)=\boxed{-\infty}$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1-e^x}{x^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{e^x-1}{x}\times\left(\dfrac{-1}{x}\right)=\boxed{-\infty}$ ، لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\dfrac{-1}{x}\right)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-e^{x}}{x^{3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{3}}\left(e^{-x}-1\right)=\boxed{-\infty}$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{3}}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$.

2. أ- نعلم أن : $g(\alpha)=0\Rightarrow 2\left(1-e^{-\alpha}\right)=\alpha\Rightarrow e^{\alpha}-1=\frac{\alpha}{2}e^{\alpha}\Rightarrow\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)e^{\alpha}=1\Rightarrow e^{\alpha}=\frac{2}{2-\alpha}$. إذن :

$$f(\alpha)=\frac{1-e^{\alpha}}{\alpha^{2}}=\frac{1-\frac{2}{2-\alpha}}{\alpha^{2}}=\frac{-\alpha}{\alpha^{2}(2-\alpha)}=\boxed{\frac{1}{\alpha(\alpha-2)}}.$$

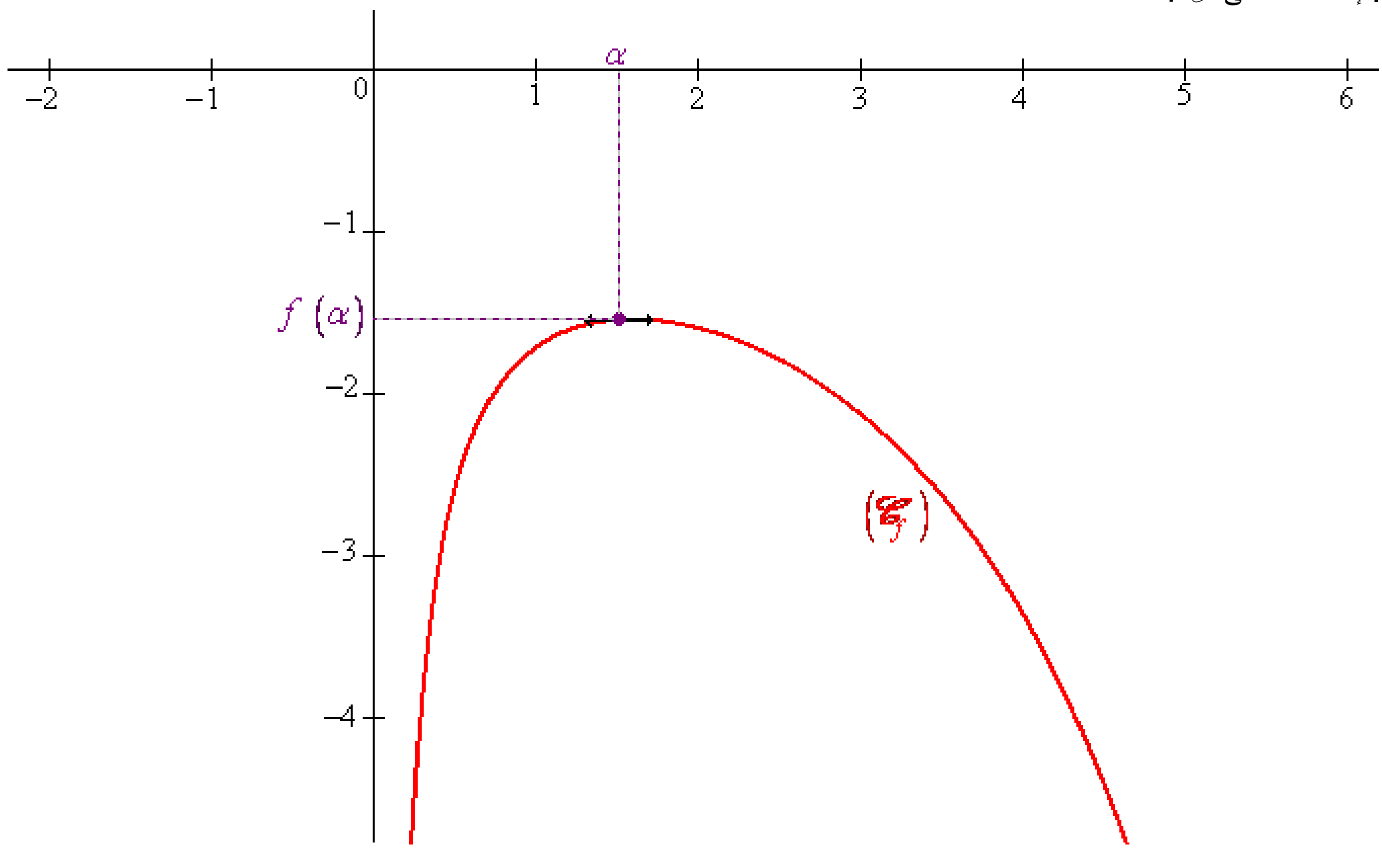
ب- ليكن $x\in\mathbb{R}_{+}^{*}$. لدينا :

$$f'(x)=\left(\frac{1-e^{x}}{x^{2}}\right)'=\frac{-e^{x}x^{2}-2x\left(1-e^{x}\right)}{x^{2}}=\frac{e^{x}\left(-x-2\left(e^{-x}-1\right)\right)}{x_{3}}=\boxed{\frac{e^{x}g(x)}{x^{3}}}$$

إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}_{+}^{*}$ هي إشارة $g(x)$ ، ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$	$\searrow$	$-\infty$

3. إنشاء المنحنى $\mathscr{C}$:



III. نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x)=\int_x^{2x}\dfrac{1-e^t}{t^2}\,dt \quad , \quad x>0 \\ F(0)=-\ln 2 \end{cases}$$

1. أ- ليكن $x>0$. لدينا : $u:t\mapsto 1-e^t$ و $v:t\mapsto \dfrac{-1}{t}$ دالتان متصلتان وقابلتان للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و $u':t\mapsto -e^t$ و $v':t\mapsto \dfrac{1}{t^2}$ دالتان متصلتان على المجال $]0,+\infty[$. إذن حسب تقنية المكاملة بالأجزاء ، لدينا :

$$F(x)=\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}\,dt=\int_x^{2x}\left(1-e^t\right)\left(-\frac{1}{t}\right)'dt=\left[\frac{e^t-1}{t}\right]_x^{2x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt$$

$$F(x)=\boxed{\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt}$$

ب- لكل $x>0$ ولكل $t\in[x,2x]$. لدينا : $x\le t\le 2x \Rightarrow e^x\le e^t\le e^{2x}\Rightarrow \dfrac{e^x}{t}\le\dfrac{e^t}{t}\le\dfrac{e^{2x}}{t}$.

إذن : $e^x\int_x^{2x}\dfrac{dt}{t}\le\int_x^{2x}\dfrac{e^t}{t}\,dt\le e^{2x}\int_x^{2x}\dfrac{dt}{t}$. أي : $\boxed{e^x\ln 2\le\int_x^{2x}\dfrac{e^t}{t}\,dt\le e^{2x}\ln 2}$ ، لأن :

$$\int_x^{2x}\frac{dt}{t}=\left[\ln t\right]_x^{2x}=\ln(2x)-\ln x=\ln\left(\frac{2x}{x}\right)=\ln 2.$$

جـ- بما أن $\forall x\in]0,+\infty[:\ e^x\ln 2\le\int_x^{2x}\dfrac{e^t}{t}dt\le e^{2x}\ln 2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}e^{2x}\ln 2=\ln 2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}e^x\ln 2=\ln 2$ ،

فإن : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\int_x^{2x}\dfrac{e^t}{t}\,dt=\ln 2}$.

استنتاج : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}-\dfrac{e^x-1}{x}-\int_x^{2x}\dfrac{e^t}{t}dt=-\ln 2=F(0)$ ، لأن :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\int_x^{2x}\dfrac{e^t}{t}\,dt=\ln 2$.

ومنه نستنتج أن F دالة متصلة على اليمين في الصفر.

2. أ- ليكن $x>0$ و $t\in[x,2x]$. لدينا :

$$\begin{aligned} x\le t\le 2x &\Rightarrow e^x\le e^t\le e^{2x} \\ &\Rightarrow 1-e^t\le 1-e^x \\ &\Rightarrow \frac{1-e^t}{t^2}\le\frac{1-e^x}{t^2} \\ &\Rightarrow F(x)\le\left(1-e^x\right)\int_x^{2x}\frac{dt}{t^2} \\ &\Rightarrow F(x)\le\left(1-e^x\right)\left[\frac{-1}{t}\right]_x^{2x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad F(x) \leq \frac{1-e^x}{2x}$$

ومنه فإن : $\forall x \in]0,+\infty[: \quad F(x) \leq \frac{1-e^x}{2x}$.

2. ب- بما أن $\forall x \in]0,+\infty[: \quad F(x) \leq \frac{1-e^x}{2x}$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{1-e^x}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x}(e^{-x}-1) = -\infty$ ، لأن :

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ ، فإن : $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \boxed{-\infty}$.

3. لدينا $t \mapsto \frac{1-e^t}{t^2}$ دالة متصلة على المجال $]0,+\infty[$ ، إذن فهي تقبل دالة أصلية φ على المجال $]0,+\infty[$ ولدينا :

$\forall x \in]0,+\infty[: F(x) = \int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2} dt = [\varphi(t)]_x^{2x} = \varphi(2x) - \varphi(x)$.

نعلم أن φ و $w : x \mapsto 2x$ الدالتان قابلتان للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ، إذن $x \mapsto \varphi(2x)$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ، وعليه فإن F دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ، ولكل x من المجال $]0,+\infty[$ ، لدينا :

$$F'(x) = (\varphi(2x) - \varphi(x))' = (2x)'\varphi'(2x) - \varphi'(x) = 2\frac{1-e^{2x}}{4x^2} - \frac{1-e^x}{x^2} F'(x) = \boxed{-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2} .$$

4. أ- ليكن $x > 0$.

✓ F دالة متصلة على المجال $[0,x]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]0,x[$. حسب مبرهنة التزايدات المنتهية ، لدينا :

$$\exists \beta \in]0,x[\ / \ F(x) - F(0) = F'(\beta)(x-0)$$

أي : $\exists \beta \in]0,x[\ / \ F(x) - F(0) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^\beta - 1}{\beta}\right) x$.

✓ $\exp$ دالة متصلة على المجال $[0,\beta]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]0,\beta[$. حسب مبرهنة التزايدات المنتهية ، لدينا :

$\exists c \in]0,\beta[\ / \ \exp(\beta) - \exp(0) = \exp'(c)(\beta - 0)$. أي : $\exists c \in]0,\beta[\ / \ e^\beta - 1 = e^c \beta$.

وبالتالي فإن : $\exists c \in]0,x[\ / \ F(x) - F(0) = -\frac{1}{2} x e^{2c}$.

ب- لدينا :

$$\begin{aligned} 0 < c < x \quad &\Rightarrow \quad 0 < 2c < 2x \\ &\Rightarrow \quad 1 < e^{2c} < e^{2x} \\ &\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}e^{2x} < -\frac{1}{2}e^{2c} < -\frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}e^{2x} < \frac{F(x) - F(0)}{x} < -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

إذن : $\forall x \in]0,+\infty[\ : \ -\frac{1}{2}e^{2x} < \frac{F(x) - F(0)}{x} < -\frac{1}{2}$.

جـ بما أن : $\forall x \in]0,+\infty[\ : \ -\frac{1}{2}e^{2x} < \frac{F(x) - F(0)}{x} < -\frac{1}{2}$ و $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ و

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -\frac{1}{2}e^{2x} = -\frac{1}{2}$ ، فإن : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x} = -\frac{1}{2}$.

وبالتالي فإن F دالة قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر ولدينا : $\boxed{F'_d(0)=-\frac{1}{2}}$.

إضافات :

- لدينا : $\lim_{x\to+\infty} F(x)=-\infty$ و $\forall x\in\left]0,+\infty\right[:\ \frac{F(x)}{x}\leq\frac{1-e^x}{2x^2}$ و

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^x}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x^2}\left(e^{-x}-1\right)=-\infty$ ، لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$.

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=-\infty$. ومنه فإن المنحنى $\mathscr{C}_F$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ اتجاهه محور الأراتيب.

- جدول تغيرات الدالة F :

x	0		$+\infty$
$F'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	
$F(x)$	$-\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

- إنشاء المنحنى $\mathscr{C}_F$: