



نوزع بطريقة عشوائية أربع كرات غير قابلة للتمييز باللمس و مرقمة 1 و 2 و 3 و 4 على ستة أشخاص  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  و  $E$  و  $F$  ، (كل شخص يمكنه أن يحصل على 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 كرات )

**التمرين الأول : (2,0 ن)**

- ① ما هو عدد إمكانيات توزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة ؟ 0,50 ن
- ② أحسب احتمال أن يحصل الشخص  $A$  على كرة واحدة على الأقل . 0,50 ن
- ③ أحسب احتمال الحدث التالي : "مجموع عددي الكرات المحصل عليها من طرف الشخصين  $B$  و  $C$  يساوي عدد الكرات المحصل عليها من طرف الشخص  $A$  . 1,00 ن

**التمرين الثاني : (4,0 ن)**

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعمد منظم  $(\vec{v}, \mathcal{O})$  نعتبر التطبيق  $f$  المعرف من  $\mathbb{C}$  نحو  $\mathbb{C}$  بما يلي :

$$f(z) = \frac{1}{6}((1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z})$$

- .  $f(z) = 0$  (I) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة : 0,50 ن
- .  $z_0 = f(z_n)$  لـ  $n \in \mathbb{N}$  و  $z_{n+1} = f(z_n)$  (II) نضع 1 و نرمز بـ  $u_n$  لمعيار العدد العقدي  $z_n$  . 0,50 ن
- ① أ بين أن :  $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$  0,50 ن
- ② ب استنتاج أن المتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  متقاربة و احسب نهايتها . 0,50 ن

$$\mathcal{S}_n = \sum_{k=0}^n \mathcal{O}M_k = \mathcal{O}M_1 + \dots + \mathcal{O}M_n \quad (2) \text{ لكل } n \in \mathbb{N} \text{ نضع :}$$

ولكل  $k \in \mathbb{N}$  نعتبر  $M_k$  صورة العدد العقدي  $z_k$  .

- ① أ بين أن  $\mathcal{S}_n \leq 3$  0,50 ن
- ② ب بين أن المتالية  $(\mathcal{S}_n)_{n \geq 0}$  متقاربة ( حساب نهاية  $(\mathcal{S}_n)_{n \geq 0}$  ) غير مطلوب ( 0,50 ن
- .  $r \in \mathbb{R}_+^*$  نضع  $z = re^{i\theta}$  حيث  $[\pi, -\pi]$  (III)
- ① أ بين أن :  $f(z) = \frac{2}{3}r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) e^{i\frac{\pi}{6}}$  1,00 ن
- ② ب بين أن النقط  $M_1, M_2, \dots, M_n$  مستقيمية  $(n \in \mathbb{N}^*)$  . 0,50 ن

**التمرين الثالث : (3,5 ن)**

. المستوى منسوب إلى معلم متعمد منظم  $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$

ليكن  $(\Gamma)$  المنحني الذي معادلته  $2y^2 - 4y - 7x = 0$

① بين أن  $(\Gamma)$  شلام و حدد رأسه و بؤرتيه. ن 0,75

② أنشئ المنحني  $(\Gamma)$  في المعلم  $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$ . ن 0,25

. (II) نعتبر في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة :  $2(y-1)^2 = 7x + 2$

. ① بين أن :  $y \equiv 2[7]$  أو  $y \equiv 0[7]$  ن 1,00

② استنتج أن مجموعة حلول المعادلة  $(E)$  هي : ن 0,50

$$S = \{(14K^2 - 4k ; 7k) / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(14k^2 + 4k ; 7k + 2) / k \in \mathbb{Z}\}$$

. ② حدد النقط  $M(x, y)$  من المنحني  $(\Gamma)$  بحيث : ن 1,00

**التمرين الرابع : (3,0 ن)**

( $\forall t \in \mathbb{R}$ ) ;  $\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} = \frac{t}{(1+t^2)} - \frac{t}{(3+t^2)} + \frac{1}{(3+t^2)}$  ① بين أن : ن 0,25

( $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ) ;  $\int_0^\alpha \frac{1}{(3+t^2)} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \right)$  ② بين أن : ن 0,50

③ نعتبر الدالة العددية  $F$  المعرفة على  $[0, \pi]$  بما يلي :

. ④ بين أن  $F$  قابلة للإشتقاق على  $[0, \pi]$ . ن 0,50

⑤ باستعمال متكاملة بتغيير المتغير  $t = \tan \left( \frac{u}{2} \right)$  بين أن : ن 0,50

$$(\forall x \in [0, \pi]) ; F(x) = 2 \int_0^{\tan \frac{x}{2}} \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt$$

$u \in [0, \pi]$  و  $t = \tan \frac{u}{2}$  حيث  $\sin u = \frac{2t}{1+t^2}$  و  $\cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  نذكر أن :

⑥ باستعمال السؤالين ④ و ⑤ بين أن : ن 0,75

$$(\forall x \in [0, \pi]) ; F(x) = \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left( \frac{\tan \left( \frac{x}{2} \right)}{\sqrt{3}} \right) + \ln \left( \frac{1 + \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right)}{3 + \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right)} \right)$$

⑦ باستعمال اتصال الدالة  $F$  بين أن : ن 0,50

**التمرين الخامس : (3,0 ن)**

في هذا التمرين  $x$  يرمز لعدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 2

نعتبر  $f_n$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$$

ليكن  $(\mathcal{E}_n)$  التمثيل المباني للدالة  $f_n$  في معلم متعمد منظم  $(\mathcal{O}, \mathcal{I}, \mathcal{J})$ .

Ⓐ أحسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$  ن 0,50

Ⓑ أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى  $(\mathcal{E}_n)$ . ن 0,75

② أحسب  $f_n'(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ثم ضع جدول تغيرات الدالة  $f_n$ . ن 0,75

Ⓐ بين أن المعادلة  $f_n(x) = 0$  تقبل حالاً واحداً  $\alpha_n$  في  $\mathbb{R}$ . ن 0,50

Ⓑ بين أن :  $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$  ن 0,25

Ⓒ بين أن  $f_n(1) > 0$  ثم استنتج أن  $e^x \geq x + 1$  ن 0,75

Ⓓ بين أن :  $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$  ن 0,50

④ أنشئ المنحنى  $(\mathcal{E}_2)$  (نأخذ :  $\alpha_2 \approx 0,6$ ) ن 0,50

Ⓐ بين أن  $f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \left( e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \right)$  بحيث  $n \geq 2$  لدينا : ن 0,50

Ⓑ استنتاج أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$  ن 0,50

Ⓒ بين أن المتالية  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  تناقصية ثم استنتاج أنها متقاربة. ن 0,75

Ⓐ باستعمال السؤال ③ بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; \frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$  ن 0,50

Ⓑ استنتاج أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) ; \frac{\ln n}{n} < \alpha_n < \frac{2 \ln n}{n}$  ن 0,50

Ⓒ حدد :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$  ن 0,25

**التمرين الأول : (2,0 ن)**

1 ■

توزيع أربع كرات مرقمة على 6 أشخاص يمكن أن يتم بخمس طرق مختلفة :

**الطريقة الأولى :** إعطاء شخص واحد الكرات الأربع.

**الطريقة الثانية :** إعطاء شخص واحد الكرة الأولى ثم نعطي الشخص الثاني الكرات الثلاث المتبقية.

**الطريقة الثالثة :** إعطاء شخص واحد كرتين و شخص ثانٍ كرتين.

**الطريقة الرابعة :** إعطاء شخص واحد كرة واحدة و شخص ثانٍ كرة واحدة و شخص ثالث كرتين.

**الطريقة الخامسة :** نعطي كل شخص كرة واحدة .

**في الطريقة الأولى لدينا :**

• إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه الكرات الأربع .

**في الطريقة الثانية لدينا :**

• إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه كرة واحدة

• و  $C_4^1$  إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيها إيه

• و  $C_5^1$  إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه الكرات الثلاث المتبقية.

**في الطريقة الثالثة لدينا :**

• إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه الكرتين

• و  $C_4^2$  إمكانية لاختيار الكرتين

• و  $C_5^1$  إمكانية لاختيار الشخص الآخر صاحب الكرتين المتبقين.

**في الطريقة الرابعة لدينا :**

• إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الأولى.

• و  $C_4^1$  إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.

• و  $C_5^1$  إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الثانية.

• و  $C_3^1$  إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.

• و  $C_4^1$  إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرتين المتبقين.

**في الطريقة الرابعة لدينا :**

• إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الأولى.

• و  $C_4^1$  إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.

• و  $C_5^1$  إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الثانية.

• و  $C_3^1$  إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.

• و  $C_2^1$  إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.

• و  $C_3^1$  إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الرابعة.

• و  $C_1^1$  إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.

**التطبيق العددي :**

5 ط	4 ط	3 ط	2 ط	1 ط	الطريقة :
8640	1440	180	120	6	عدد الإمكانيات

و بالتالي : عدد الإمكانيات لتوزيع الكرات الأربع على الأشخاص ستة هو :

$$6 + 120 + 180 + 1440 + 8640 = 10386$$

② ■

الشخص A يمكنه أن يحصل على :

- كرة واحدة بـ  $C_4^1$  إمكانية.
- أو يحصل على كرتين بـ  $C_4^2$  إمكانية.
- أو يحصل على ثلاثة كرات بـ  $C_4^3$  إمكانية.
- أو يحصل على أربع كرات بإمكانية واحدة .

إذن عدد الإمكانيات التي يحصل فيها الشخص A على كرة واحدة على الأقل هو :

$$C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15$$

و منه : احتمال أن يحصل الشخص A على كرة واحدة على الأقل يساوي :

$$\frac{15}{10386} \approx 0,0015 \equiv 0,15\%$$

③ ■

إذا حصل الشخص C على كرة واحدة رقمها m و حصل الشخص B على كرة واحدة رقمها n فإن الشخص A سيحصل على  $(m+n)$  كرة و لدينا :

$$m + n + 2 = 4$$

$$\Leftrightarrow m + n = 2$$

نعلم أن  $m \neq n$  إذن هذه المعادلة لا تقبل حلولا في المجموعة  $\{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$

و بالتالي نحن بصدد حدث مستحيل و احتمال وقوعه 0

التمرين الثاني : (4,0)

(I) ■

نضع :  $f(z) = 0$  ثم ننطلق من الكتابة :  $z = x + iy$

$$\Leftrightarrow (1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + i\sqrt{3})(x + iy) + 2(x - iy) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - \sqrt{3}y) + i(-y + \sqrt{3}x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \sqrt{3}y = 0 \\ -y + \sqrt{3}x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \sqrt{3}y \\ 3x = \sqrt{3}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = x + i\sqrt{3}x$$

$$\Leftrightarrow z = x(1 + i\sqrt{3})$$

و منه : مجموعة حلول المعادلة  $f(z) = 0$  في  $\mathbb{C}$  تكتب على الشكل :

$$S = \{ x(1 + i\sqrt{3}) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

(II) ■

$$f(z) = \frac{1}{6}((1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z}) \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow f(z_n) = \frac{1}{6}((1 + i\sqrt{3})z_n + 2\bar{z}_n)$$

$$\Rightarrow |f(z_n)| = \left| \frac{1}{6}((1 + i\sqrt{3})z_n + 2\bar{z}_n) \right|$$

نعلم أن :  $|z| = |\bar{z}|$  و  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

$$\Rightarrow |f(z_n)| \leq \frac{1}{6}|(1 + i\sqrt{3})z_n| + \frac{1}{6}|2\bar{z}_n| \quad \text{إذن :}$$

$$\Rightarrow |f(z_n)| \leq \left(\frac{1}{6}\right)2|z_n| + \left(\frac{2}{6}\right)|z_n|$$

$$\Rightarrow |f(z_n)| \leq \frac{2}{3}|z_n|$$

$$\Rightarrow |z_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|z_n|$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$$

و نعلم أن معيار عدد عقدي يكون دائماً موجباً.

$$(\forall n \in \mathbb{R}) \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n \quad \text{إذن :}$$

(II) ■

$$(\forall n \in \mathbb{R}) \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n \quad \text{لدينا :}$$

$$0 \leq u_n \leq \frac{2}{3}u_{n-1} \quad \text{من أجل } (n-1) \text{ نحصل على :}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{2}{3}u_{n-1}$$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)u_{n-2}$$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 u_{n-3}$$

⋮

⋮

$$\downarrow \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n u_{n-n}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n u_0 \quad \text{و وبالتالي :}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad \text{لدينا :}$$

لأن  $\left(\frac{2}{3}\right)^n$  متتالية هندسية أساسها موجب و أصغر من 1

و وبالتالي :  $(u_n)_n$  متقاربة و تؤول إلى الصفر

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0} \quad \text{يعني :}$$

(II) ■

$$\mathcal{S}_n = OM_0 + OM_1 + \dots + OM_n \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{S}_n = |z_0| + |z_1| + \dots + |z_n|$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{S}_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$(\forall n \in \mathbb{R}) \quad 0 \leq u_n \leq \frac{2}{3}u_{n-1} \quad \text{و نعلم أن :}$$

$$\begin{cases} u_0 \leq 1 \\ u_1 \leq \left(\frac{2}{3}\right) \\ \vdots \\ u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2r}{3} \left( \left( \frac{3\cos\theta}{4} - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4} \right) + \left( i \frac{\sqrt{3}\cos\theta}{4} - i \frac{\sin\theta}{4} \right) \right) \\
&= \frac{2r}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta - \frac{1}{2} \sin\theta \right) + i \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \cos\theta - \frac{1}{2} \sin\theta \right) \right) \\
&= \frac{2r}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + i \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \right) \\
&= \frac{2r}{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \frac{2r}{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

②(III) ■

$k \in \{1, \dots, n\}$  هو لحق النقطة  $M_k$  بحيث :  $f(z_{k-1})$  لدينا :

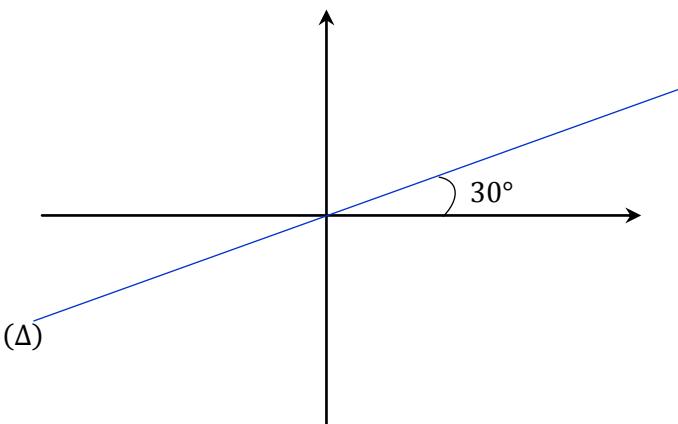
$$f(z) = \frac{2r}{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \quad \text{ولدينا :}$$

$$\Rightarrow f(z_{k-1}) = \frac{2r}{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\Rightarrow \arg(f(z_{k-1})) \equiv \arg\left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(f(z_{k-1})) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

و بالتالي النقط  $M_1$  و  $M_2$  و ... و  $M_n$  تنتهي إلى نفس المستقيم ( $\Delta$ ) المبين في الشكل التالي :



$$u_0 + u_1 + \dots + u_n \leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad \text{و منه :}$$

$$\Leftrightarrow S_n \leq \left( \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)} \right)$$

$$\Leftrightarrow S_n \leq 3 \left( 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right)$$

$$-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \leq 0 \quad \text{إذن :} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \geq 0 \quad \text{ولدينا :}$$

$$\left( 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right) \leq 1 \quad \text{و منه :}$$

$$3 \left( 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right) \leq 3 \quad \text{يعني :}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : S_n \leq 3 \quad \text{و وبالتالي :}$$

②(II) ■

$$S_n = OM_0 + OM_1 + \dots + OM_n \quad \text{لدينا :}$$

نلاحظ أن :

$$(OM_0 + \dots + OM_n) + OM_{n+1} > (OM_0 + \dots + OM_n)$$

$$OM_{n+1} > S_n \quad \text{إذن :}$$

إذن  $(S_n)_n$  متتالية متزايدة

و بما أنها مكبورة بالعدد 3 (يعني :  $S_n \leq 3$ ) فإنها متقاربة.

①(III) ■

$$f(z) = \frac{1}{6} ((1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z}) \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{6} (r(1 + i\sqrt{3})e^{i\theta} + 2re^{-i\theta})$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \frac{2r}{3} \left( \left( \frac{1}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \right) e^{i\theta} + \frac{e^{-i\theta}}{2} \right)$$

$$= \frac{2r}{3} \left( \left( \frac{1}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \right) (\cos\theta + i \sin\theta) + \frac{1}{2} (\cos\theta - i \sin\theta) \right)$$

$$= \frac{2r}{3} \left( \frac{\cos\theta}{4} + i \frac{\sin\theta}{4} + i \frac{\sqrt{3}\cos\theta}{4} - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4} + \frac{\cos\theta}{2} - i \frac{\sin\theta}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \frac{2r}{3} \left( \frac{3\cos\theta}{4} + i \frac{\sqrt{3}\cos\theta}{4} - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4} - i \frac{\sin\theta}{4} \right)$$

التمرين الثالث : (3,5)

(1) (I) ■

.  $y \equiv 0[7]$  في حالة :

$(\exists k \in \mathbb{Z}) ; y = 7k$  لدينا :

$2y(y - 2) = 7x$  ولدينا :

$2(7k)(7k - 2) = 7x$  يعني :

$x = 14k^2 - 4k$  إذن :

.  $y \equiv 2[7]$  في حالة :

$(\exists k \in \mathbb{Z}) ; y = 7k + 2$  لدينا :

$2y(y - 2) = 7x$  ولدينا :

$2(7k + 2)(7k) = 7x$  يعني :

$x = 14k^2 + 4k$  إذن :

و بالتالي : مجموعة حلول المعادلة ( $E$ ) هي :

$$S = \{(14k^2 - 4k ; 7k), (14k^2 + 4k ; 7k + 2) / k \in \mathbb{Z}\}$$

(2) (II) ■

$x \wedge y = 9$  لدينا :

$y = 7k$  و  $x = 14k^2 - 4k$  في حالة :

لدينا حسب خوارزمية إقليدس :

$14k^2 - 4k$	$7k$
<hr/>	
$-4k$	$2k$

إذن من هذه القسمة الأقلية نستنتج أن :

$$(14k^2 - 4k) \wedge (7k) = (7k) \wedge (-4k) = k$$

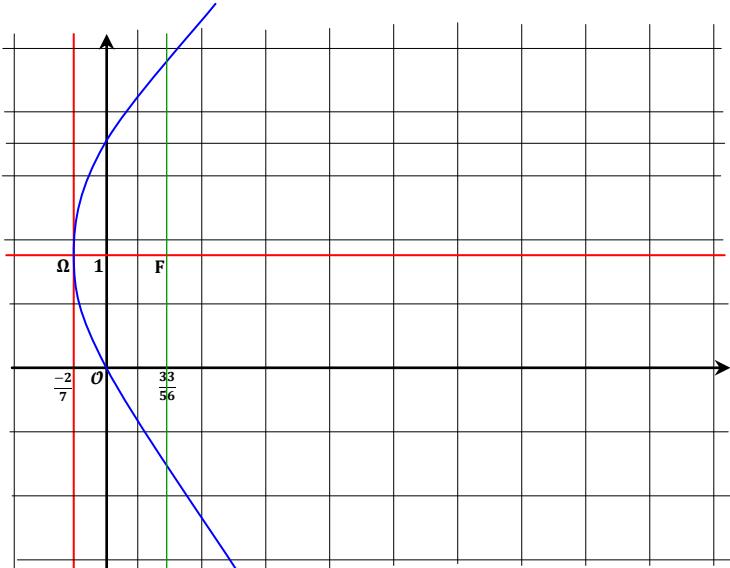
$7 \wedge (-4) = 1$  لأن :

$x \wedge y = k = 9$  ومنه :

.  $M_1(1098 ; 63)$  و منه نحصل على النقطة :

$$\begin{aligned} 2y^2 - 4y - 7x &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(y^2 - 2y) &= 7x \\ \Leftrightarrow 2(y - 1)^2 &= 7x + 2 \\ \Leftrightarrow (y - 1)^2 &= \frac{7}{2}x + 1 \\ \Leftrightarrow (y - 1)^2 &= \frac{7}{2}\left(x + \frac{2}{7}\right) \\ \Omega\left(\frac{-2}{7}; 1\right) &\text{ إذن } (\Gamma) \text{ شجم رأسه :} \\ F\left(\frac{7}{8} - \frac{2}{7}; 0 + 1\right) &\text{ و بورته :} \\ F\left(\frac{33}{56}; 1\right) &\text{ يعني :} \end{aligned}$$

(2) (I) ■



(1) (II) ■

$2(y - 1)^2 = 7x + 2$  لدينا :

$$\Leftrightarrow 2(y^2 - 2y + 1) = 7x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2y(y - 2) = 7x$$

$$\Leftrightarrow 7 / 2y(y - 2)$$

و بما أن العدد 7 أولي فإن :

$$\Leftrightarrow 7/2 \text{ أو } 7/y \text{ أو } 7 / (y - 2)$$

$$\Leftrightarrow y \equiv 0[7] \text{ أو } y \equiv 2[7]$$

٤٣ ■

$$u \rightarrow \frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} \quad \text{لدينا :}$$

دالة متصلة على المجال  $[0, \pi]$  لأنها خارج معرف الدالتين  
متصلتين على  $[0, \pi]$  بحيث  $2 + \cos u \neq 0$

. إذن فهي تقبل دالة أصلية  $F$  على المجال  $[0, \pi]$

. يعني :  $F$  قابلة للإشتقاق على المجال  $[0, \pi]$

$$F'(x) = \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x} \quad \text{ولدينا :}$$

٤٣ ■

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $[0, \pi]$

$$F(x) = \int_0^x \left( \frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} \right) du \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{dt}{du} = \frac{1 + t^2}{2} \quad \text{إذن} \quad t = \tan\left(\frac{u}{2}\right) \quad \text{نضع :}$$

$$F(x) = \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left( \frac{1 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}{2 + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \right) \left( \frac{2}{1+t^2} \right) dt \quad \text{و منه :}$$

$$F(x) = 2 \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt$$

٤٣ ■

$$F(x) = 2 \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt$$

$$= 2 \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2} \right) dt$$

$$= 2 \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left( \frac{t}{1+t^2} \right) dt - 2 \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left( \frac{t}{3+t^2} \right) dt \\ + 2 \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left( \frac{1}{3+t^2} \right) dt$$

$$= [\ln(1+t^2)]_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} - [\ln(3+t^2)]_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \\ + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$

في حالة :  $y = 7k + 2$  و  $x = 14k^2 + 4k$

لدينا :  $14k^2 + 4k = 2k(7k + 2)$

إذن من هذه النتيجة نستنتج أن :

$$(14k^2 + 4k) \wedge (7k + 2) = (7k + 2)$$

و منه :  $x \wedge y = 7k + 2 = 9$

$k = 1$  يعني :

.  $M_2(18; 9)$  و منه نحصل على النقطة :

التمرين الرابع : (٣,٠ ن)

١ ■

$$\begin{aligned} \frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2} &= \frac{t}{1+t^2} + \frac{1-t}{3+t^2} \quad \text{لدينا :} \\ &= \frac{t(3+t^2) + (1-t)(1+t^2)}{(1+t^2)(3+t^2)} \\ &= \frac{t^2 + 2t + 1}{(1+t^2)(3+t^2)} \\ &= \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} \end{aligned}$$

ملاحظة : المسار العكسي لهذه المتسلسلة سنت دراسته بتفاصيله في السنة الأولى من الأقسام التحضيرية أو الأسدس الثاني من الجامعة أو السنة الأولى من (BTS) . وهذه العملية تسمى :

< la décomposition d'une fraction rationnel en éléments simples >

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-3)} \quad \text{مثال :}$$

٢ ■

$$\int_0^\alpha \left( \frac{1}{3+t^2} \right) dt = \frac{1}{3} \int_0^\alpha \left( \frac{1}{1+\frac{t^2}{3}} \right) dt \quad \text{لدينا :}$$

$$dt = \sqrt{3}du \quad \text{إذن} \quad u = \frac{t}{\sqrt{3}} \quad \text{نضع :}$$

$$\int_0^\alpha \left( \frac{1}{3+t^2} \right) dt = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{3}}} \left( \frac{1}{1+u^2} \right) dt \quad \text{و منه :}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\alpha \left( \frac{1}{3+t^2} \right) dt = \frac{\sqrt{3}}{3} [\operatorname{Arctan} u]_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{3}}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\alpha \left( \frac{1}{3+t^2} \right) dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \right)$$

• ① •

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}} \right) = \frac{1}{n} \quad \text{لدينا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f_n(x) - \frac{1}{n}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-nx}) = 0 \quad \text{ولدينا:}$$

كما نعلم أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$

إذن من هذه النتائج نستنتج أن المستقيم  $y = \frac{1}{n}x$  مقارب مائل بجوار  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}} \right) = +\infty \quad \text{ولدينا كذلك:}$$

(\*)

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left( \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) + \ln \left( \frac{1 + \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right)}{3 + \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right)} \right) \right) = \int_0^\pi \left( \frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} \right) du$$

و نعلم أن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$

إذن ( $\mathcal{C}_n$ ) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب نحو الأسفل.

• ② •

$$f'_n(x) = \left( \frac{x}{n} - e^{-nx} \right)' = \frac{1}{n} + ne^{-nx} > 0$$

إذن  $f_n$  دالة تزايدية قطعا على  $\mathbb{R}$ .

نستنتج جدول تغيرات الدالة  $f_n$  كما يلي:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}(" + \infty ") = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	
$f_n$	$-\infty$	$+\infty$

• ③ •

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة  $f_n$ .

دالة متصلة و تزايدية قطعا على  $\mathbb{R}$ .

إذن  $f_n$  تقابل من  $\mathbb{R}$  نحو  $\mathbb{R}$ .

بما أن:  $0 \in \mathbb{R}$  فإنه يمتلك سابقا واحدا  $\alpha_n$  من  $\mathbb{R}$  بالتقابل

و بالتالي:  $f_n(\alpha_n) = 0$

نعرض هاتين النهايتين في المتساوية (\*) نحصل على:

$$\ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} = \int_0^\pi \left( \frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} \right) du$$

التمرين الخامس : (3.0 ن)

• ① •

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{n} - e^{-nx} \right) = (+\infty) - 0 = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( \frac{1}{n} - \frac{e^{-nx}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}} \right) \\ &= (-\infty) \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{0^-} \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

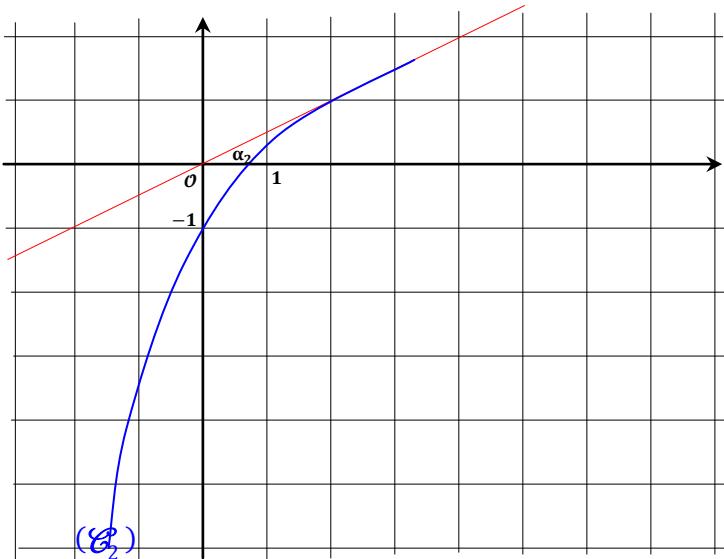
و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطية :

$$\exists c \in \left[ \frac{1}{n}, 1 \right] ; f_n(c) = 0$$

و بما أن المعادلة  $f_n(x) = 0$  تقبل حلًا واحدًا هو  $\alpha_n$ .

$$\frac{1}{n} < \alpha_n < 1 \quad \text{و منه: } \alpha_n = c \quad \text{فإن}$$

(4) ■



(E2) ■

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{n+1} - e^{-(n+1)\alpha_n}$$

$$\Leftrightarrow f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n - ne^{-(n+1)\alpha_n} - e^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \left( \frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} - 1 - \frac{1}{n} \right)$$

$$e^{-n\alpha_n} = \frac{\alpha_n}{n} \quad \text{إذن: } f_n(\alpha_n) = 0 \quad \text{و نعلم أن:}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} = \frac{\alpha_n}{n(e^{-n\alpha_n}) \cdot e^{-\alpha_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} = \frac{\alpha_n}{n \cdot \left( \frac{\alpha_n}{n} \right) \cdot e^{-\alpha_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} = e^{\alpha_n}$$

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \left( e^{\alpha_n} - 1 - \frac{1}{n} \right) \quad \text{و بالتالي:}$$

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{e}\right)$$

بما أن:  $n \geq 2$  فإن:

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{e} \quad \text{و منه: } n^2 \geq 4 > e \quad \text{أي: } \frac{1}{n^2} - \frac{1}{e} < 0 \quad \text{يعني:}$$

$$(\forall n \geq 2) ; f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0 \quad \text{و بالتالي:}$$

(E3) ■

$$\varphi'(x) = e^x - 1 \quad \text{إذن: } \varphi(x) = e^x - x - 1 \quad \text{نضع:}$$

و منه: نستنتج جدول تغيرات الدالة  $\varphi$  كما يلي:

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	0	+
$\varphi$	$+\infty$	0	$+\infty$

بما أن  $\varphi$  دالة متصلة على  $\mathbb{R}$  و قيمتها الدنيا حسب الجدول هي 0

فإنه:  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi(x) \geq 0$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq x + 1 \quad \text{يعني:}$$

و من هذه المقاوطة نستنتج:  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; e^n \geq n + 1$

و منه:  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; e^n \geq n$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^n} < \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow e^{-n} < \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} - e^{-n} > 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow f_n(1) = \frac{1}{n} - e^{-n} > 0$$

(E3) ■

لدينا  $f_n$  دالة متصلة على  $\mathbb{R}$ .

إذن فهي متصلة على  $[1; \frac{1}{n}]$  بحيث:  $n \geq 2$

و لدينا:  $f_n(1) > 0$  و  $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$

إذن:  $f_n(1) \cdot f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$

٦)

.  $n \geq 2$

$$e^{-n\alpha_n} = \frac{\alpha_n}{n} \quad \text{لدينا:} \quad f_n(\alpha_n) = 0$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{\alpha_n}{n} < \frac{1}{n} \quad \text{إذن:} \quad \frac{1}{n} < \alpha_n < 1$$

ونعلم أن:

$$\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n} \quad \text{وبالتالي:}$$

٦)

$$\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n} \quad \text{لدينا:}$$

$$\ln\left(\frac{1}{n^2}\right) < \ln(e^{-n\alpha_n}) < \ln\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{إذن:}$$

. لأن الدالة  $\ln$  تزايدية قطعا على  $\mathbb{R}_*^+$

$$-2\ln(n) < -n\alpha_n < -\ln(n) \quad \text{و منه:}$$

$$\ln(n) < n\alpha_n < 2\ln(n) \quad \text{إذن:}$$

$$\frac{\ln(n)}{n} < \alpha_n < \frac{2\ln(n)}{n} \quad \text{وبالتالي:}$$

٦)

من التأطير الثمين الأخير الذي حصلنا عليه نستنتج أن:

$$\lim_{n \infty} (\alpha_n) = 0$$

$$\lim_{n \infty} \left( \frac{\ln n}{n} \right) = \lim_{n \infty} \left( \frac{2\ln n}{n} \right) = 0 \quad \text{لأن:}$$

و الحمد لله رب العالمين ■

٥)

$$(\#) \quad e^{\alpha_n} \geq \alpha_n + 1 \quad \text{لدينا حسب السؤال:}$$

$$\alpha_n > \frac{1}{n} \quad \text{لدينا حسب السؤال:}$$

$$(\#\#) \quad \alpha_n + 1 > \frac{1}{n} + 1 \quad \text{إذن:}$$

$$e^{\alpha_n} \geq \frac{1}{n} + 1 \quad \text{من (\#) و (\#\#) نستنتج أن:}$$

$$e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \geq 0 \quad \text{يعني:}$$

$$f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0 \quad \text{وبالتالي:}$$

$$\frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \quad \text{لأن الكمية موجبة دائمًا.}$$

٥)

$$(*) \quad f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 \quad \text{لدينا:}$$

. لأن  $f_{n+1}(x) = 0$  حل للمعادلة:

$$(\star\star) \quad f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0 \quad \text{ولدينا:}$$

من (\*) و (\*\*) نستنتج أن:

و بما أن  $f_{n+1}$  دالة تزايدية قطعا على  $\mathbb{R}$ .

$$\alpha_n \geq \alpha_{n+1} \quad \text{فإن:}$$

و بالتالي:  $(\alpha_n)_n$  تناقصية.

$$\frac{1}{n} < \alpha_n \quad \text{و} \quad \frac{1}{n} > 0 \quad \text{ولدينا:}$$

$$\alpha_n > 0 \quad \text{إذن:}$$

(2)  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  مصغرة بالعدد 0 يعني:

من (1) و (2) نستنتج أن المتتالية  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة.  
وسوف نحدد نهايتها فيما بعد.