التمرين 1: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي وأن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية، صفرها المصفوفة المنعدمة $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

و وحدتها المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. ليكن $*$ قانون التركيب الداخلي المعرف في $\mathbb{C}$ بما يلي:

$$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ (\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2)\quad ;\quad (x+yi)*(a+bi)=xa+(x^2b+a^2y)i$$

0.25 | 1- أ) بين أن القانون $*$ تبادلي في $\mathbb{C}$

0.5 | ب) بين أن القانون $*$ تجميعي في $\mathbb{C}$

0.25 | ج) بين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا e يتم تحديده.

0.25 | د) ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. بين أن العدد العقدي $x+yi$ يقبل العدد العقدي $\frac{1}{x}-\frac{y}{x^4}i$ مماثلا له بالنسبة للقانون $*$

2- نعتبر المجموعة الجزئية E للمجموعة $\mathbb{C}$ المعرفة بما يلي: $E=\{x+yi\,/\,x\in\mathbb{R}_+^*\ ;\ y\in\mathbb{R}\}$

0.25 | أ) بين أن E مستقر بالنسبة للقانون $*$ في $\mathbb{C}$

0.5 | ب) بين أن $(E,*)$ زمرة تبادلية.

3- نعتبر المجموعة الجزئية G للمجموعة E المعرفة بما يلي : $G=\{1+yi\,/\,y\in\mathbb{R}\}$

0.5 | بين أن G زمرة جزئية للزمرة $(E,*)$

4- نعتبر المجموعة $F=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}/\,x\in\mathbb{R}_+^*\ ;\ y\in\mathbb{R}\right\}$

0.25 | أ) بين أن F مستقر بالنسبة للقانون $\times$ في $M_2(\mathbb{R})$

0.5 | ب) ليكن φ التطبيق من E نحو F الذي يربط كل عدد عقدي $x+yi$ من E بالمصفوفة $M(x^2,y)=\begin{pmatrix}x^2&y\\0&x^2\end{pmatrix}$ من F . بين أن φ تشاكل تقابلي من $(E,*)$ نحو $(F,\times)$

0.25 | ج) استنتج أن $(F,\times)$ زمرة تبادلية.

التمرين 2: (3.5 نقطة)

ليكن m عددا **عقديا غير حقيقي** $(m\in\mathbb{C}-\mathbb{R})$

I- نعتبر في $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z المعرفة بما يلي: $(E)\ :\ z^2-(1+i)(1+m)z+2im=0$

0.25 | 1- أ) بين أن مميز المعادلة (E) غير منعدم.

0.5	ب) حدد z_1 و z_2 ، حلي المعادلة (E)
	2- نفترض في هذا السؤال أن $m = e^{i\theta}$ حيث $0 < \theta < \pi$
0.5	أ) حدد معيار و عمدة للعدد $z_1 + z_2$
0.25	ب) بين أنه إذا كان $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ فإن $z_1 + z_2 = 2i$

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط التالية:

A النقطة ذات اللحق $a = 1+i$ ، B النقطة ذات اللحق $b = (1+i)m$ ، C النقطة ذات اللحق $c = 1-i$ ،

D صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و Ω منتصف القطعة $[CD]$.

0.5	1- أ) بين أن لحق النقطة Ω هو $\omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$
0.25	ب) احسب $\frac{b-a}{\omega}$
0.5	ج) استنتج أن $(O\Omega) \perp (AB)$ و أن $AB = 2O\Omega$
	2- المستقيم $(O\Omega)$ يقطع المستقيم (AB) في النقطة H ذات اللحق h
0.5	أ) بين أن $\frac{h-a}{b-a}$ عدد حقيقي وأن $\frac{h}{b-a}$ عدد تخيلي صرف .
0.25	ب) استنتج h بدلالة m

التمرين 3: (3 نقط)

نقبل أن 2969 (السنة الأمازيغية الحالية)**عدد أولي**.

ليكن n و m عددين صحيحين طبيعيين بحيث: $n^8 + m^8 \equiv 0 \ [2969]$

	1- نفترض في هذا السؤال أن **2969 لا يقسم** n
0.5	أ) باستعمال مبرهنة بوزو (BEZOUT)، بين أن: $(\exists u \in \mathbb{Z});\ u \times n \equiv 1 \ [2969]$
0.5	ب) استنتج أن: $(u \times m)^8 \equiv -1 \ [2969]$ و أن: $(u \times m)^{2968} \equiv -1 \ [2969]$ (لاحظ أن: $2968 = 8 \times 371$)
0.5	ج) بين أن 2969 لا يقسم $u \times m$
0.5	د) استنتج أنه لدينا أيضا: $(u \times m)^{2968} \equiv 1 \ [2969]$
0.5	2- أ) باستعمال النتائج السابقة، بين أن **2969 يقسم** n
0.5	ب) بين أن: $n^8 + m^8 \equiv 0 \ [2969] \Leftrightarrow n \equiv 0 \ [2969]$ و $m \equiv 0 \ [2969]$

التمرين 4: (10 نقط)

الجزء I : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=4x\left(e^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	0.5
2- أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، و أن: $f'(x)=4\left(e^{-x}-1\right)(1-x)$; $(\forall x\in\mathbb{R})$	0.5
ب) ادرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم ضع جدول تغيراتها .	0.75
ج) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال $\left]\frac{3}{2},2\right[$ بحيث: $f(\alpha)=0$ (نأخذ: $e^{\frac{3}{2}}=4,5$)	0.5
د) تحقق أن: $e^{-\alpha}=1-\frac{\alpha}{2}$	0.25
3- أ) بتطبيق مبرهنة رول على الدالة f' ، بين أنه يوجد عدد حقيقي x_0 من المجال $]0,1[$ بحيث : $f''(x_0)=0$	0.5
ب) بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة f'' ، بين أنه، لكل عدد حقيقي x يخالف x_0 من المجال $[0,1]$ ، لدينا: $\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$	0.5
ج) استنتج أن $I(x_0,f(x_0))$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C)	0.25
4- أ) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C)	0.5
ب) مثل مبيانيا المنحنى (C) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$ و $f(1)=-0.5$ و غير مطلوب إنشاء النقطة I)	0.5
5- أ) تحقق أن: $f(x)\leq 0$; $(\forall x\in]-\infty,\alpha])$	0.25
ب) بين أن: $\int_0^\alpha f(x)dx=\frac{2\alpha(\alpha^2-3)}{3}$ ، ثم استنتج أن : $\frac{3}{2}<\alpha\leq\sqrt{3}$	0.75
ج) أحسب، بدلالة α و بوحدة cm^2 ، مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها على التوالي: $y=0$ و $x=0$ و $x=\alpha$	0.5

الجزء II: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي:

$$u_0<\alpha \quad \text{و} \quad u_{n+1}=f(u_n)+u_n \quad ; \quad (\forall n\in\mathbb{N})$$

1-أ) بين بالترجع أن: $u_n < \alpha$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ (استعمل السؤال 5-أ) من الجزء I)	0.5
ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية.	0.25
2- **نفترض أن** $0 \le u_0$ و نضع: $g(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$; $(\forall x \in \mathbb{R})$	
أ) بين أن: $g(x) > 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$ (نأخذ: $\ln 2 = 0.69$)	0.5
ب) باستعمال نتيجة السؤال السابق، بين أن: $0 \le u_n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ (لاحظ أن: $f(x) + x = 4xg(x)$)	0.5
ج) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.	0.25
د) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	0.5
3- **نفترض أن** $u_0 < 0$	
أ) بين أن: $u_{n+1} - u_n \le f(u_0)$; $(\forall n \in \mathbb{N})$	0.5
ب) بين أن: $u_n \le u_0 + nf(u_0)$; $(\forall n \in \mathbb{N})$	0.5
ج) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	0.25

انتهى