المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵓⵔⵓⵜ ⴰⵣⵣⴰⵡⴰⵏ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⴼⵍⵍⴰ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2018

-الموضوع-

NS24

★★

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية : "أ" و " ب "	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بالبنيات الجبرية..........................(3.5 ن)
- التمرين 2 يتعلق بالحسابيات................................(3 ن)
- التمرين 3 يتعلق بالأعداد العقدية..........................(3.5 ن)
- التمرين 4 يتعلق بالتحليل..................................(7.5 ن)
- التمرين 5 يتعلق بالتحليل..................................(2.5 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين 1: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي وأن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية، صفرها المصفوفة المنعدمة $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

و وحدتها المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و أن $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

لكل زوج (x,y) من $\mathbb{R}^2$ نضع : $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-2y\\y&x+2y\end{pmatrix}$

و نعتبر المجموعة $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

0.25 1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$

0.25 2- أ) بين أن E فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

0.5 ب) نضع $J=M(0,1)$. بين أن (I,J) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,.)$

0.5 3- أ) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

0.5 ب) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية.

4- ليكن φ التطبيق من $\mathbb{C}^*$ نحو $M_2(\mathbb{R})$ المعرف بما يلي:

$$(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\})\ ;\ \varphi(x+iy)=M(x+y,-y)=\begin{pmatrix}x+y&2y\\-y&x-y\end{pmatrix}$$

0.5 أ) بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

0.5 ب) نضع $E^*=E-\{O\}$. بين أن: $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

0.25 ج) استنتج أن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية.

0.25 5- بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

التمرين 2: (3 نقط)

ليكن p عددا أوليا بحيث: $p=3+4k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$

0.5 1- بين أن لكل عدد صحيح نسبي x ، إذا كان $x^2\equiv 1\ [p]$ فإن $x^{p-5}\equiv 1\ [p]$

2- ليكن x عددا صحيحا نسبيا يحقق: $x^{p-5}\equiv 1\ [p]$

0.5 أ) بين أن x و p أوليان فيما بينهما.

0.5 ب) بين أن: $x^{p-1}\equiv 1\ [p]$

0.5 ج) تحقق أن: $2+(k-1)(p-1)=k(p-5)$

0.5 د) استنتج أن: $x^2\equiv 1\ [p]$

0.5 3- حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $x^{62}\equiv 1\ [67]$

التمرين 3: (3.5 نقطة)

ليكن m عددا عقديا.

I- نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية ℂ المعادلة (E_m) ذات المجهول z :

$$z^2+(im+2)z+im+2-m=0$$

0,25 — 1- أ) تحقق أن $\Delta=(im-2i)^2$ هو مميز المعادلة (E_m)

0,5 — ب) إعط حسب قيم العدد m مجموعة حلول المعادلة (E_m)

0,5 — 2- من أجل $m=i\sqrt{2}$، اكتب حلي المعادلة (E_m) على الشكل الأسي.

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A و Ω و M و M' ذات الألحاق على التوالي $a=-1-i$ و $\omega=i$ و m و $m'=-im-1+i$

1- ليكن R الدوران الذي زاويته $-\frac{\pi}{2}$ و يحول M إلى M'.

0.25 — أ) تحقق أن Ω هو مركز الدوران R

0.5 — ب) حدد b لحق النقطة B التي تحقق : $A=R(B)$

0,5 — 2- أ) تحقق أن: $m'-a=\frac{\omega-a}{\omega-b}(m-b)$

0,5 — ب) استنتج أن النقط A و M و M' تكون مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط A و B و Ω و M متداورة.

0,5 — ج) بين أن مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و M و M' مستقيمية هي دائرة يجب تحديد مركزها و شعاعها.

التمرين 4: (7.5 نقطة)

الجزء I :

0.5 — 1- أ) بين أن: $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt=x-\ln(1+x)$; $(\forall x\in]0,+\infty[)$

ب) باستعمال تغيير المتغير : $u=t^2$ بين أن:

0.5 — $$\int_0^x \frac{t}{1+t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{1}{1+\sqrt{u}}du \quad ; \quad (\forall x\in]0,+\infty[)$$

0.5 — ج) استنتج أن: $\frac{1}{2(1+x)}\le\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\le\frac{1}{2}$; $(\forall x\in]0,+\infty[)$

0.25 — 2- حدد : $\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

الجزء II :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $\begin{cases} f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\ln(1+x) \quad ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

و ليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.25 | 1- أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0

0.5 | ب) بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 (يمكن استعمال نتيجة السؤال I-2).

0.75 | ج) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.5 | 2- أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم تحقق أن:

$$(\forall x\in]0,+\infty[) \quad ; \quad f'(x)=\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

0.25 | ب) استنتج أن f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

0.25 | ج) تحقق أن: $f([0,+\infty[)=[1,+\infty[$

0.5 | 3- مثل مبيانيا المنحنى (C) (يتم إنشاء نصف المماس على اليمين في النقطة ذات الأفصول 0).

الجزء III :

1- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=f(x)-x$

0.5 | أ) بين أن: $(\forall x\in]0,+\infty[) \quad ; \quad 0\leq f'(x)\leq \dfrac{1}{2}$

0.5 | ب) استنتج أن الدالة g تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ ثم بين أن: $g(]0,+\infty[)=]-\infty,1[$

0.25 | ج) بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0,+\infty[$

2- ليكن a عددا حقيقيا من المجال $]0,+\infty[$

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0=a$ و $u_{n+1}=f(u_n) \quad ; \quad (\forall n\in \mathbb{N})$

0.25 | أ) بين أن: $(\forall n\in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_n>0$

0.5 | ب) بين أن: $(\forall n\in \mathbb{N}) \quad ; \quad |u_{n+1}-\alpha|\leq \dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$

0.5 | ج) بين بالترجع أن: $(\forall n\in \mathbb{N}) \quad ; \quad |u_n-\alpha|\leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |a-\alpha|$

0.25 | د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تؤول إلى α

التمرين 5: (2.5 نقطة)

نعتبر الدالة F المعرفة على ℝ بما يلي: $F(x)=\int_0^x e^{t^2}\,dt$

1- بين أن F متصلة و تزايدية قطعا على ℝ 0.5

2- أ) بين أن: $F(x)\geq x \quad ; \quad (\forall x\in]0,+\infty[)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 0.5

ب) بين أن F فردية ثم استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ 0.5

ج) بين أن F تقابل من ℝ نحو ℝ 0.5

د) بين أن دالة التقابل العكسي G للدالة F قابلة للاشتقاق في 0 ثم احسب $G'(0)$ 0.5

انتهى

البنيات الجبرية :

1 - لدينا $M(1,0)=I\in E$ إذن E مجموعة غير فارغة

و لأن $E\subset M_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2.

- ليكن x و y و a و b عناصر من $\mathbb{R}$

$$M(x,y)-M(a,b)=\begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x-a & -2y+2b \\ y-b & x-a+2y-2b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x-a & -2(y-b) \\ y-b & a-x+2(y-b)\end{pmatrix}$$

0,25

$$=M(x-a;y-b)\in E$$

لأن $y-b$ و $x-a$ عنصرين من $\mathbb{R}$

إذن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$

2 - أ - لدينا E جزء غير فارغ من $M_2(\mathbb{R})$

ليكن a و b و x و y و α من $\mathbb{R}$

$$M(a,b)+M(x,y)=\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a+x & -2b-2y \\ b+y & x+a+2b+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+x & -2(b+y) \\ b+y & x+a+2(b+y)\end{pmatrix}$$

$$\underline{M(a,b)+M(x,y)=M(a+x,b+y)\in E}$$

لأن $a+x$ و $b+y$ عنصرين من $\mathbb{R}$

$$\alpha\cdot M(a,b)=\alpha\cdot\begin{pmatrix} a & -2b\\ b & a+2b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha a & -2\alpha b\\ \alpha b & \alpha(a+2b)\end{pmatrix}$$

0,25

$$\underline{\alpha\cdot M(a,b)}=\begin{pmatrix} \alpha a & -2\alpha b\\ \alpha b & \alpha a+2\alpha b\end{pmatrix}\underline{=M(\alpha a,\alpha b)\in E}$$

لأن αa و αb عنصرين من $\mathbb{R}$

إذن E فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

ب - لنبين أن (I,J) أسرة مولدة للفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$

$I=M(1,0)\in E$ و $J=M(0,1)\in E$

ليكن x و y من $\mathbb{R}$:

$$M(x,y)=\begin{pmatrix} x & -2y\\ y & x+2y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -2y\\ y & 2y\end{pmatrix}$$

$$=x\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$=x\cdot M(1,0)+y\cdot M(0,1)$$

0,5

$$\underline{M(x,y)=x\cdot I+y\cdot J}$$

إذن (I,J) أسرة مولدة للفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$

لنبين أن (I,J) أسرة حرة

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}$

لدينا: $x\cdot I+y\cdot J=M(0,0)$

أي

$$\begin{pmatrix} x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -2y\\ y & 2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة الدار البيضاء - سطات

الشعبة أو المسلك : SMA المستوى : ....

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مادة : MAT

التقدير المفسر للنقطة

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها)

تتمة البنيات الجبرية :

4 - أ - لدينا :
$\varphi((x+iy)(a+ib)) = M(xa-yb+bx+ya ; -bx-ya)$

$\varphi(a+ib) \times \varphi(x+iy) = M(a+b, -b) \times M(x+y, -y)$ ②

ولدينا مما سبق أن :
$M(x,y) \times M(a,b) = M(xa - 2yb ; xb + ya + 2yb)$

أي :
$M(a+b ; -b) \times M(x+y ; -y) = M((x+y)(a+b) - 2by ; -y(a+b) - b(x+y) + 2yb)$
$= M(xa + ya + xb + \cancel{yb} - \cancel{2by} ; -ya - \cancel{yb} - bx - \cancel{by} + \cancel{2yb})$
$= M(xa - by + bx + ya ; -ya - bx)$ ①

إذن من ① و ② نستنتج أن :
0,5
$\varphi(a+ib) \times \varphi(x+iy) = M(xa - yb + bx + ya ; -bx - ya)$

إذن :
$\varphi((x+iy)(a+ib)) = \varphi(a+ib) \times \varphi(x+iy)$
ومنه فإن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

ب - لنبين أن : $\varphi(\mathbb{C}^*) \subset E^*$

ليكن $x+iy$ من $\mathbb{C}^*$

أي $(x,y) \neq (0,0)$ ولدينا : $\varphi(x+iy) = M(x+y, -y)$

ومنه $(x+y, -y) \neq (0,0)$ أي $M(x+y, -y) \neq M(0,0)$

إذن $M(x+y, -y) \in E - \{0\}$

أي $M(x+y, y) \in E^*$ ومنه $\varphi(x+iy) \in E^*$

إذن $\varphi(\mathbb{C}^*) \subset E^*$

لنبين أن $E^* \subset \varphi(\mathbb{C}^*)$

ليكن $M(a,b)$ من E^*

أي $(a,b) \neq (0,0)$

ومنه $(a+b,-b) \neq (0,0)$

إذن $(a+b)-ib \in \mathbb{C}^*$

إذن $\varphi(a+b-ib) \in \mathbb{C}^*$

أي $M(a+b-b, +b) \in \varphi(\mathbb{C}^*)$ 0,5

أي $M(a,b) \in \varphi(\mathbb{C}^*)$

إذن $E^* \subset \varphi(\mathbb{C}^*)$

إذن $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

ج- بما أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

و $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية

فإن $(\varphi(\mathbb{C}^*),\times)$ زمرة تبادلية

ولدينا $E^* = \varphi(\mathbb{C}^*)$ 0,25

إذن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية

د- لدينا: $(E,+)$ زمرة تبادلية

و الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في E حسب 3-

و $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية و $M(0,0)=0$ هو العنصر 0,25

المحايد في $(E,+)$

إذن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

الحسابيات:

1- ليكن n عدد صحيح نسبي و p عدد أولي

لدينا $n^2 \equiv 1 [p]$

نضع $n \wedge p = d$

d يساوي p أو 1 لأن p أولي

نفترض أن $d=p$

أي p/n

ومنه p/n^2

وهذا تناقض لأن $n^2 \equiv 1 [p]$

ومنه p و n أوليين فيما بينهما

وبما أن p أولي موجب و $k>0$ و $p=3+4k$

فإن حسب مبرهنة فيرما الصغرى: $n^{p-1} \equiv 1 [p]$

ومنه $n^{p-5} \times n^4 \equiv 1 [p]$; $(p>5)$ ①

المملكة المغربية
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
جهة الدار البيضاء - سطات

الشعبة أو المسلك : SMA .... المستوى ....

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مادة : MAT

خاص بكتابة الإمتحان

النقطة النهائية	على 20
....	
....	بالحروف

التقدير المفسر للنقطة

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

التمرين 4 : التحليل :

1) أ- ليكن x من $]0,+\infty[$

$$\int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt = \int_0^x \left(\frac{t+1}{1+t} - \frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = \left[t - \ln(1+t)\right]_0^x$$

$$= x - \ln(1+x) - \ln(1)$$

0,5

إذن
$$\int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt = x - \ln(1+x)$$

ب- ليكن x من $]0,+\infty[$ ، لدينا $u = t^2$

لدينا : $t = x \Longrightarrow u = x^2$

و $t = 0 \Longrightarrow u = 0$

ولدينا $u = t^2 \Longrightarrow t = \sqrt{u}$ ✓

أي $du = 2t\,dt$

ومنه $dt = \dfrac{du}{2t}$ ✓

0,8

إذن
$$\int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt = \int_0^{x^2} \frac{\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}} \times \frac{1}{2\sqrt{u}} \times du$$

✓

إذن
$$\int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}\,du$$

ج- لدينا
$$\int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}\,du$$

و
$$\int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt = x - \ln(1+x)$$

أي
$$x - \ln(1+x) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}\,du$$

ولدينا $0 \le u \le x^2$ أي $0 \le \sqrt{u} \le x$

ومنه $1 \le \sqrt{u}+1 \le x+1$

أي $\dfrac{1}{x+1} \le \dfrac{1}{\sqrt{u}+1} \le 1$

بما أن الدالة $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}+1}$ متصلة على $[0,+\infty[$

فبالمرور إلى التكامل نحصل على : $(x>0)$

$$\frac{1}{2}\times\int_0^{x^2}\frac{1}{x+1}\,du \le \frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{1}{\sqrt{u}+1}\,du \le \frac{1}{2}\int_0^{x^2}du$$

ومنه
$$\frac{1}{2(x+1)}\int_0^{x^2}du \le x-\ln(x+1) \le \frac{1}{2}\int_0^{x^2}du$$

أي
$$\frac{x^2}{2(x+1)} \le x-\ln(x+1) \le \frac{x^2}{2}$$
0,5

وبما أن $\dfrac{1}{x^2} > 0$

فإن
$$\boxed{\frac{1}{2(x+1)} \le \frac{x-\ln(x+1)}{x^2} \le \frac{1}{2}}$$

2 - لدينا : $(\forall x \in]0,+\infty[)\quad \dfrac{1}{2(1+x)} \le \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2} \le \dfrac{1}{2}$

و $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2(1+x)} = \dfrac{1}{2}$

و $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

إذن $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

0,25

الجزء II :

1) أ- الاتصال على اليمين في 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x)$$
$$= \lim_{x\to 0^+}(x+1)\times\frac{\ln(1+x)}{x}$$
$$= 1\times 1 = 1 = f(0)$$

0,25

المملكة المغربية
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
جهة الدار البيضاء - سطات

الشعبة أو المسلك: SMA المستوى ....

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مادة: MAT

التقدير المفسر للنقطة

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

تتمة تمرين التحليل، الجزء II

ب - (تتمة) لدينا $(\forall x \in]0,+\infty[)\ f'(x) > 0$

(البرهنة في الورقة السابقة) 0,25

ومنه f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

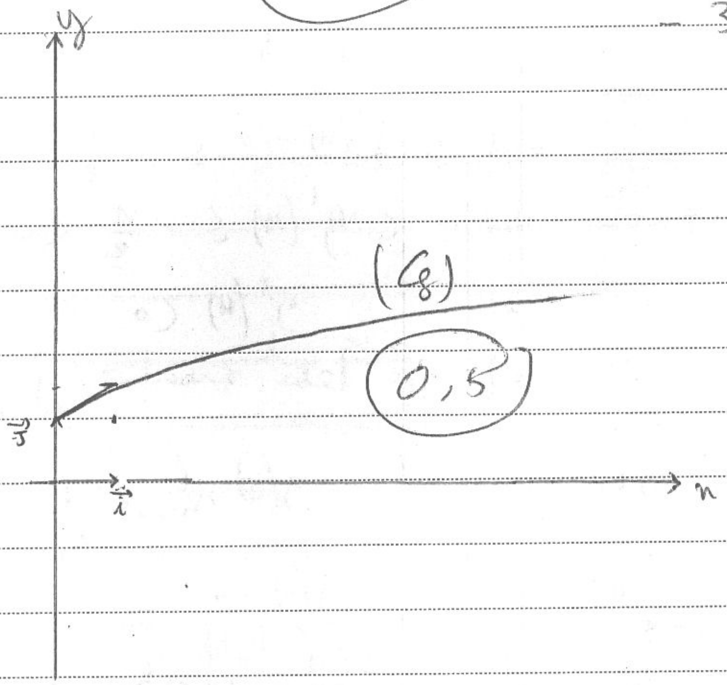
ج- نعلم أن f تزايدية قطعا،

$$f([0,+\infty[) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)[$$

ونعلم أن $f(0) = 1$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

إذن $f([0,+\infty[) = [1,+\infty[$ 0,25

3 -



الجزء III

1 - أ - لدينا ← I - ج ، ليكن x من $]0,+\infty[$

$$\frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$$

و $f'(x) = \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

و $x>0$ أي $\frac{1}{2(1+x)} > 0$

ومنه $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$ ✓

إذن $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ ✓ ، $(\forall x \in]0,+\infty[)$

0,5

ب - ليكن x من $]0,+\infty[$

لدينا $g(x) = f(x) - x$ وبما أن f قابلة للاشتقاق

على $]0,+\infty[$ و الدالة $-x$ ← قابلة

للاشتقاق على $]0,+\infty[$ فإن g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

فإن $g'(x) = f'(x) - 1$

ولدينا $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

ومنه $-1 \leq f'(x) - 1 \leq -\frac{1}{2}$

أي $-1 \leq g'(x) \leq -\frac{1}{2} < 0$

ومنه $g'(x) < 0$

إذن ✓ g تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$.

0,25

ومنه $g(]0,+\infty[) =]\lim_{x\to+\infty} g(x), \lim_{x\to 0^+} g(x)[$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) \times x = -\infty$

0,25 ✓

لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ← II - 1 ج

و $\lim_{x\to+\infty} -1 \times x = -\infty$

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة الدار البيضاء - سطات

الشعبة أو المسلك : SNA المستوى ....

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مادة : MAT

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

التقدير المفسر للنقطة

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

تتمة التمرين 4 - التحليل : III - 2 - ج - تتمة الترجع

لدينا : $\frac{1}{2}|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|a-\alpha|$ ①

و $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$ ②

من ① و ② نستنتج أن :

$$|u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|a-\alpha|$$

0,25

إذن حسب مبدأ الترجع :

$$(\forall n\in\mathbb{N}) ; \quad |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n|a-\alpha|$$

د - لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N}) ; \quad |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n|a-\alpha|$

و $0<\frac{1}{2}<1$

أي $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n|a-\alpha|=0$

لأن $|a-\alpha|$ عدد حقيقي موجب

0,25

إذن حسب مصاديق التقارب :

$$\begin{cases} |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n|a-\alpha| \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n|a-\alpha|=0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$$

إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تؤول إلى α

التمرين 3: $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \ , \ D_F = \mathbb{R}$

1 - الدالة $t \xrightarrow{g} e^{t^2}$ متصلة على $\mathbb{R}$ لأن $t \xrightarrow{u} t^2$ متصلة على $\mathbb{R}$ و $u(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ و $x \mapsto e^x$ متصلة على $\mathbb{R}$

ومنه فإن g تقبل دالة أصلية φ على $\mathbb{R}$

و $F(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$

$\varphi(0)$ ثابتة

0,25

و الدالة φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأنها هي أصلية g)

ومنه F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن ف F متصلة على $\mathbb{R}$

و $F'(x) = \varphi'(x)$

$= g(x)$ (لأن φ هي أصلية g)

$F'(x) = e^{x^2} > 0$

0,25

لأن الدالة $x \mapsto e^x$ موجبة مهما يكن x من $\mathbb{R}$

إذن F تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

2 - أ - ليكن x من $]0, +\infty[$

لدينا $0 \leq t \leq x$ لأن $x > 0$

ومنه $0 \leq t^2 \leq x^2$

أي $1 \leq e^{t^2} \leq e^{x^2}$ (الدالة $x \mapsto e^x$ تزايدية ومتصلة على $\mathbb{R}$)

ومنه: $\int_0^x dt \leq \int_0^x e^{t^2} dt \leq \int_0^x e^{x^2} dt$ ($x > 0$) بالمرور إلى التكامل نحصل على:

$\boxed{x \leq F(x)} \leq e^{x^2} \int_0^x dt$

0,5

إذن $\forall x \in]0, +\infty[\quad x \leq F(x)$

و بما أن $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

فإن $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

ب - ليكن x من $\mathbb{R}$

نعلم أن $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \ -x \in \mathbb{R}$

إذن D_F متماثلة بالنسبة للصفر.

$F(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2} dt$

نضع $u = -t$

المملكة المغربية
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ

وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة الدار البيضاء - سطات

الشعبة أو المسلك : SMA ...... المستوى ......

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مادة : MAT

التقدير المفسر للنقطة

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ......

الأعداد العقدية (تتمة)

I - 2

$(E_m) = \{ -1-i ; -im-1+i \}$

إذا كان $m = i\sqrt{2}$

فإن حلي المعادلة هما $z_1 = -1-i$ و $z_2 = -i\sqrt{2}-1+i$

$* \; z_1 = -1-i = -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
$= \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)}$

$\boxed{z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}}$

0,5

$* \; z_2 = -i\sqrt{2}-1+i$
$= -\sqrt{2}i - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
$= -\sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$
$= \sqrt{2}e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{8}}\left(e^{i\frac{3\pi}{8}} + e^{-i\frac{3\pi}{8}}\right)$
$= \sqrt{2} \times 2\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \times e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{8}}$

$\left(\cos\frac{\pi}{8} > 0\right)$

$\boxed{z_2 = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) e^{i\frac{9\pi}{8}}}$

II - 1 - أ

الصيغة العقدية للدوران R هو $z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-c)+c$

حيث c لحق مركزه

ونعلم أن مركز الدوران يكون نقطة صامدة بالدوران

لنتحقق من أن $\Omega(w)$ نقطة صامدة بالدوران R،

$-iw - 1 + i = -i \times i - 1 + i$
$= \cancel{1} - \cancel{1} + i = i = w$ ✓

0,25

إذن w نقطة صامدة بالدوران R إذن فهو مركز الدوران.

$$a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-w)+w$$

$$\iff a-w = -i(b-w)$$

$$\iff b-w = -\frac{1}{i}(a-w)$$

$$\iff b = w + i(a-w)$$

$$\iff b = i + i(-1-i-i)$$

$$\iff b = i - i + 2$$

$$\iff b = 2$$

لدينا: $A = R(B) \iff a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-w)+w$

$$\iff w-a = -e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-w)$$

$$\iff \frac{w-a}{b-w} = -e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\iff \frac{w-a}{w-b} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

ولدينا $M' = R(M)$

أي $m' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(m-w)+w$

ومنه $m'-a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(m-w)+w-a$

أي $m'-a = \quad - e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-w)$

أي $m'-a = \frac{w-a}{w-b}(m-w) - \frac{w-a}{w-b}(b-w)$

$$= \frac{w-a}{w-b}(m-w-b+w)$$

إذن $m'-a = \frac{w-a}{w-b}(m-b)$

A, M, Ω, B متداورة $\iff \overline{(\overrightarrow{\Omega B}; \overrightarrow{\Omega A})} \equiv \overline{(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA})}\,[\pi]$

$$\iff \arg\left(\frac{a-w}{b-w}\right) \equiv \arg\left(\frac{a-m}{b-m}\right)\,[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{a-w}{b-w}\right) - \arg\left(\frac{a-m}{b-m}\right) \equiv 0\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{w-a}{w-b}\right) - \arg\left(\frac{m-a}{m-b}\right) \equiv 0\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{w-a}{w-b} \times \frac{m-b}{m-a}\right) \equiv 0\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{w-a}{w-b} \times (m-b) \times \frac{1}{m-a}\right) \equiv 0\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{m'-a}{m-a}\right) \equiv 0\ [\pi]$$

0,5

$$\Leftrightarrow \frac{m'-a}{m-a} \in \mathbb{R}$$

⟺ A و M و M' مستقيمية

إذن

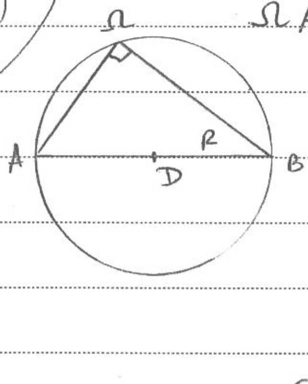
B و Ω و M و A متداورة ⟺ A و M و M' مستقيمية

ج-

A و M و M' مستقيمية ⟺ B و Ω و M و A متداورة

⟺ M تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث AΩB ✓

0,5



ولدينا $A = R(B)$ أي $\Omega A = \Omega B$

و $(\Omega A) \perp (\Omega B)$

إذن $[AB]$ قطر للدائرة

ومنه مركز الدائرة هو منتصف $[AB]$

$$z_D = \frac{a+b}{2} = \frac{-1-i+2}{2}$$

لحق الشعاع $\boxed{z_D = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i}$ ✓

R شعاع هذه الدائرة

$$R = |D - \Omega| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i - i\right|$$

$$\boxed{R} = \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2} i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}$$ ✓

ب)

$t=-x \Rightarrow u=x$

و $t=0 \Rightarrow u=0$

و $du=-dt \Rightarrow dt=-du$

إذن: حسب تغيير المتغير:

$F(-x)=\int_0^{-x} e^{t^2}\,dt=-\int_0^{x} e^{u^2}\,du$

$F(-x)=-F(x)$

إذن F دالة فردية

0,5

بما أن الدالة فردية

و $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

نضع $t=-x$ فإنه

$\lim_{x\to-\infty} F(x)=\lim_{t\to+\infty} F(-t)$

لأن F فردية $=\lim_{t\to+\infty} -F(t)$

إذن $\lim_{x\to-\infty} F(x)=-\infty$

ج- لدينا F متصلة وتزايدية قطعا على IR

إذن F تقابل من IR نحو F(IR)

ومنه $F(\mathbb{R})=\left]\lim_{x\to-\infty} F(x),\lim_{x\to+\infty} F(x)\right[$

0,5

$=\left]-\infty,+\infty\right[=\mathbb{R}$

ومنه F تقابل من IR نحو IR

د- برهنت في 1 أن F قابلة للاشتقاق

على IR و $F'(x)=e^{x^2}$ و $F(0)=0 \Leftrightarrow G(0)=0$

ومنه فإن F قابلة للاشتقاق

في الصفر و $F'(0)=e^0=1\neq 0$

ومنه فإن F' لا تنعدم في 0

0,5

إذن G قابلة للاشتقاق في 0

و $G'(0)=\dfrac{1}{F'(G(0))}=\dfrac{1}{F'(0)}=\dfrac{1}{1}$

إذن $\boxed{G'(0)=1}$

ROYAUME DU MAROC

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION REGION CASABLANCA - SETTAT

Série ou Filière : .... Niveau : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : ....

Note définitivê sur 20

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

الأعداد العقدية:

1) أ-

$z^2+(im+2)z+im+2-m=0$

$\Delta=(im+2)^2-4(im+2-m)$

$= -m^2+4+\cancel{4im}-\cancel{4im}-8+4m$

0,25

$= -m^2-4+4m$

$= (im)^2+(2i)^2-2\times 2i\times im$

إذن $\underline{\Delta=(im-2i)^2}$

ب- حالة 1 - إذا كان $m=2$ فإن $\Delta=0$

ومنه المعادلة تقبل حلا وحيدا هو

$z=\frac{-im-2}{2}=\frac{-i\times 2-2}{2}=-1-i$

إذن $\boxed{z=-1-i}$

0,5

حالة 2 إذا كان $m\neq 2$ فإن $\Delta\neq 0$

ومنه للمعادلة حلين هما

$$\begin{cases} z_1=\frac{-\cancel{im}-2+\cancel{im}-2i}{2} \\ z_2=\frac{-im-2-im+2i}{2} \end{cases}$$ و

إذن

$$\begin{cases} z_1=-1-i \\ z_2=-im-1+i \end{cases}$$

إذن $(E_m)=\{-1-i\,;-im-1+i\}$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) - x$$

$= f(0) - 0$ لأن f متصلة على اليمين في الصفر

$= 1$

إذن $g(]0,+\infty[) =]-\infty, 1[$

ج - ليكن x من $]0,+\infty[$

الدالة g متصلة على $]0,+\infty[$

لأن f متصلة على $]0,+\infty[$ و $x \mapsto -x$ متصلة على $]0,+\infty[$

و الدالة g تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ إذن فهي تقابل.

ولدينا $0 \in g(]0,+\infty[) =]-\infty, 1[$

إذن

0,25 $(\exists!\alpha \in]0,+\infty[) \,/\, g(\alpha) = 0$

إذن $(\exists!\alpha \in]0,+\infty[) \,/\, f(\alpha) - \alpha = 0$

أي $(\exists!\alpha \in]0,+\infty[) \,/\, f(\alpha) = \alpha$

2 - أ - ليكن a من $]0,+\infty[$

لأجل $n=0$ لدينا : $u_0 = a > 0$

ليكن n من $\mathbb{N}$

نفترض أن $u_n > 0$

لنبين أن $u_{n+1} > 0$

لدينا $u_n > 0$ و f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

ومنه $f(u_n) > f(0)$

0,25

أي $f(u_n) > 1 > 0$

إذن $u_{n+1} > 0$

ومنه حسب مبدأ الترجع

$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 0$

ROYAUME DU MAROC

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION REGION CASABLANCA - SETTAT

Série ou Filière : .... Niveau : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : ....

Note définitive sur 20
....

Appréciations expliquant la note chiffrée

....

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

ب- لدينا : f متصلة على $[0,+\infty[$

و f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ولدينا

$(\forall x \in]0,+\infty[) ; -\frac{1}{2} \leq 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

إذن : $(\forall x \in]0,+\infty[) ; \boxed{|f'(x)| \leq \frac{1}{2}}$

و $u_n > 0$ أي $u_n \in]0,+\infty[$

و α عنصر من $]0,+\infty[$

0,5

إذن α و u_n عنصرين من $]0,+\infty[$

إذن حسب متفاوتة التزايدات المنتهية :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

ولدينا $f(\alpha) = \alpha$ و $f(u_n) = u_{n+1}$

إذن $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

ج- لدينا من أجل $n=0$ $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |a - \alpha|$

أي $|a - \alpha| \leq |a - \alpha|$

وهذا صحيح

ليكن n من $\mathbb{N}$

نفترض أن : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$

لنبين أن : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|$

0,25

لدينا $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$

ومنه $\boxed{\frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|}$ 1

ولدينا حسب III - 2 - ب

$\boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|}$ 2

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur c... ne pouvant indiquer sa provenance

لأن $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

و $\lim\limits_{x\to 0^+} 1+x = 1$

إذن f متصلة على اليمين في 0

ب - قابلية الاشتقاق :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x+1}{x}\times\ln(1+x) - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(x+1)\ln(1+x) - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(1+x) + \ln(1+x) - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(1+x)}{x^2} - \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

0,5

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

لأن $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

و $2-\mathrm{I} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

ج -

$$-\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x) = +\infty$$

0,25

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1} = 1$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty$

$$-\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2}\times\ln(1+x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2}\times\frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$$

0,25

ROYAUME DU MAROC

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION REGION CASABLANCA - SETTAT

Série ou Filière : .... Niveau : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : ....

Note définitive sur 20

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

لأن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$

و $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = 1$

نستنتج مما سبق أن (C_f) يقبل فرع شلجمي باتجاه محور الأفاصيل $+\infty$

0,25

4 - أ- الدالة $x \mapsto \ln(1+x)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنه $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) : 1+x > 0$

والدالة $x \mapsto x+1$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها حدودية

والدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنه مجال ضمن مجموعة تعريفها.

إذن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها جداء هذه الدوال.

0,5

ليكن $x \in]0,+\infty[$; نعلم أن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ أي ;

$f'(x) = \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{x+1} + \ln(1+x) \times \frac{x-(x+1)}{x^2}$

$= \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}$

إذن $f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

ب- لدينا حسب I ج ; $(\forall x \in]0,+\infty[)$:

$\frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = f'(x)$

وبما أن $x > 0$ فإن $\frac{1}{1+x} > 0$ أي $\frac{1}{2(1+x)} > 0$

إذن $(\forall x \in]0,+\infty[) : f'(x) > 0$

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur ... que pouvant indiquer sa provenance

~~ولدينا $n^2 \equiv 1 [p]$~~

~~أي $n^4 \equiv 1 [p]$~~

~~إذن $n^{p-5} \times n^4 \equiv n^{p-5} [p]$ (2)~~

~~ومن (1) و (2) نستنتج أن $n^{p-5} \equiv 1 [p]$~~

~~2 - p~~

الحسابيات :

1 - ليكن n عدد صحيح نسبي و p عدد أولي

لدينا : $p-5 = 3+4k-5 = 4k-2$

$= 2(2k-1)$

ولدينا $k>0$

أي $2k-1>0$

0,5

ولدينا : $n^2 \equiv 1 [p]$

أي $n^{2(2k-1)} \equiv 1^{2k-1} [p] \equiv 1 [p]$

إذن $n^{p-5} \equiv 1 [p]$

2 - أ - لدينا : $n^{p-5} \equiv 1 [p]$

أي $(\exists k \in \mathbb{Z}) : n^{p-5} = 1 + pk$

ومنه $n^{p-5} - pk = 1$

أي $(p-6>0)$ $n^{p-6} \times n - pk = 1$

0,5

ومنه حسب مبرهنة بوزو (يوجد n^{p-6} و $-k$ من $\mathbb{Z}$)

n و p أوليين فيما بينهما.

ب - لدينا p عدد أولي موجب

و n و p أوليين فيما بينهما

ومنه حسب مبرهنة فيرما الصغرى :

0,8

$n^{p-1} \equiv 1 [p]$

ج - أي لنتحقق أن $2+(k-1)(p-1)-k(p-5)=0$

لدينا $2+(k-1)(p-1)-k(p-5) = 2+kp-p-k+1-kp+5k$

$= 3+4k-p = p-p = 0$ (لأن $p=3+4k$)

ROYAUME DU MAROC
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ACADÉMIE RÉGIONALE
D'EDUCATION ET DE FORMATION
REGION CASABLANCA - SETTAT

Série ou Filière : .... Niveau : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : ....

Note définitive sur 20
....

Appréciations expliquant la note chiffrée
....

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

إذن $2+(k-1)(p-1)-k(p-5)=0$

ومنه $2+(k-1)(p-1)=k(p-5)$ 0,8

لدينا $n^{p-1} \equiv 1\,[p]$

أي $n^{(p-1)(k-1)} \equiv 1^{(k-1)}\,[p] \equiv 1\,[p]$

ومنه $n^{(p-1)(k-1)} \times n^2 \equiv n^2\,[p]$

$\Rightarrow n^{2+(p-1)(k-1)} \equiv n^2\,[p]$

ولدينا $2+(p-1)(k-1)=k(p-5)$

إذن : $\Rightarrow n^{k(p-5)} \equiv n^2\,[p]$ ①

ولدينا : $n^{p-5} \equiv 1\,[p]$ 0,5

أي $n^{k(p-5)} \equiv 1^k\,[p] \equiv 1\,[p]$ ②

من ① و ② لدينا : $\underline{n^2 \equiv 1\,[p]}$

3 - لدينا حسب الأسئلة السابقة : $\underline{n^2 \equiv 1\,[p] \Leftrightarrow n^{p-5} \equiv 1\,[p]}$

في حالة $p=67$ لدينا : $67 = 3 + 4\times 16$

أي $n^{62} \equiv 1\,[67] \Leftrightarrow n^{67-5} \equiv 1\,[67]$

وبما أن $n^2 \equiv 1\,[p] \Leftrightarrow n^{p-5} \equiv 1\,[p]$

فإن $n^{62} \equiv 1\,[67] \Leftrightarrow n^2 \equiv 1\,[\;]$

$\Leftrightarrow n^2-1 \equiv 0\,[67]$

$\Leftrightarrow (n-1)(n+1) \equiv 0\,[67]$

$\Leftrightarrow n-1 \equiv 0\,[67]$ أو $n+1 \equiv 0\,[67]$

لأن 67 أولي

$n^{62} \equiv 1\,[67] \Leftrightarrow n = 1+67k$ أو $n = 67k-1$ (k من $\mathbb{Z}$)

إذن $S = \{1+67k\,;\,67k-1 \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$ 0,8

ومنه:

$$\begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

أي $x=0$ و $y=0$ و $-2y=0$ و $x+2y=0$

إذن $x=0$ و $y=0$

ومنه (I,J) أسرة حرة.

أي (I,J) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,\cdot)$

3- أ- نعلم أن E جزء غير فارغ من $M_2(\mathbb{R})$

ليكن a و b و x و y من $\mathbb{R}$

$$M(a,b)\times M(x,y) = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax-2by & -2ya-2bx-4by \\ bx+ay+2by & -2by+ax+2ya+2bx+4by \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax-2by & -2(ya+bx+2by) \\ bx+ay+2by & ax-2by+2(ya+bx+2by) \end{pmatrix}$$

$$= M(ax-2by\,;\,bx+ay+2by) \in E$$

لأن $ax-2by$ و $bx+ay+2by$ عنصرين من $\mathbb{R}$

إذن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

0,5

ب- لدينا: $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

أي $(E,+)$ زمرة تبادلية

ولدينا: E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$

أي E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),+)$

ولدينا: E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{a-w}{b-w}\right) - \arg\left(\frac{a-m}{b-m}\right) \equiv 0\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{w-a}{w-b}\right) - \arg\left(\frac{m-a}{m-b}\right) \equiv 0\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{w-a}{w-b} \times \frac{m-b}{m-a}\right) \equiv 0\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{w-a}{w-b} \times (m-b) \times \frac{1}{m-a}\right) \equiv 0\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{m'-a}{m-a}\right) \equiv 0\ [\pi]$$

0,5

$$\Leftrightarrow \frac{m'-a}{m-a} \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow$ A و M و M' مستقيمية

إذن

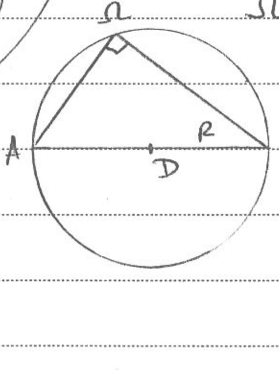
A و M و Ω و B متداورة $\Leftrightarrow$ A و M و M' مستقيمية

ج-

A و M' و M مستقيمية $\Leftrightarrow$ A و M و Ω و B متداورة

$\Leftrightarrow$ M تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث $A\Omega B$

0,5



ولدينا $A = R(B)$ أي $\Omega A = \Omega B$

و $(\Omega A) \perp (\Omega B)$

إذن $[AB]$ قطر للدائرة

ومنه مركز الدائرة هو منتصف $[AB]$

$$z_D = \frac{a+b}{2} = \frac{-1-i+2}{2}$$

لحق الشعاع $\boxed{z_D = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$

R شعاع هذه الدائرة: $R = |D - \Omega| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - i\right|$

$$\boxed{R} = \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}$$

Série ou Filière : .... Niveau : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : ....

Note définitive sur 20

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

وبما أن الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في $M_2(\mathbb{R})$

فإن الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في E.

ونعلم أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

و الضرب تجميعي في $M_2(\mathbb{R})$

أي فهو تجميعي في E. - ليكن x و y و a و b من $\mathbb{R}$

لدينا: $M(a,b)\times M(x,y) = M(ax-2by; bx+ay+2by)$

حسب السؤال السابق

و $M(x,y)\times M(a,b) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} xa-2yb & -2ay-2xb-4yb \\ xb+ya+2yb & -2yb+xa+2ay+2xb+4yb \end{pmatrix}$

0,5

$M(x,y)\times M(a,b) = M(xa-2yb; xb+ya+2yb)$

ومنه $M(x,y)\times M(a,b) = M(a,b)\times M(x,y)$

إذن الضرب تبادلي في E.

ومنه نستنتج أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية.

4 - أ) ليكن $a+ib$ و $x+iy$ عنصرين من $\mathbb{C}^*$

$\varphi((x+iy)(a+ib)) = \varphi(xa+iya+ibx-yb)$

$= \varphi(xa-yb+i(bx+ya))$

$= M(xa-yb+bx+ya; -bx-ya)$