

الثانية علوم رياضية الوطني الاستدراكي 2017

التمرين 1 : 4,5 ن

نذكر أن $\mathbb{C}, +, \times$ جسم تبادلي وأن $M_2(\mathbb{R}), +, \cdot$ فضاء متجهي حقيقي وأن $M_2(\mathbb{R}), +, \times$ حلقة واحدة غير تبادلية و غير كاملة .

نضع : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix}$ لكل x, y من $\mathbb{R}^2$ و $E = M(x, y) / x, y \in \mathbb{R}^2$

1. بين أن E فضاء متجهي جزئي من $M_2(\mathbb{R}), +, \cdot$ بعده 2 0,75

2. (أ) بين أن E جزء مستقر من $M_2(\mathbb{R}), \times$ 0,5

(ب) بين أن $E, +, \times$ حلقة واحدة و تبادلية 0,75

3. نضع $E^* = E \setminus M(0, 0)$ و نعتبر التطبيق φ من $\mathbb{C}^*$ نحو E^* المعروف بما يلي :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x + iy) = M\left(x, \frac{y}{\sqrt{3}}\right)$$

(أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $\mathbb{C}^*, \times$ نحو $E^*, \times$ 0,75

(ب) استنتج أن $E^*, \times$ زمرة تبادلية . 0,5

(ج) بين أن : $J^{2017} = \varphi(3^{1008}\sqrt{3}i)$ ثم حدد مقلوب المصفوفة J^{2017} في $E^*, \times$ 0,75

4. بين أن $E, +, \times$ جسم تبادلي. 0,5

التمرين 2 : 3 ن

يحتوي كيس على $2n$ كرة (n من $\mathbb{N}^*$) ، منها n كرة بيضاء و n كرة سوداء. جميع الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس.

تقتضي لعبة سحب كرة واحدة من الكيس و تسجيل لونها و إعادتها إلى الكيس ثم سحب كرة أخرى من نفس الكيس و تسجيل لونها كذلك .
قانون اللعبة هو كما يلي :

- إذا كان لون الكرتين المسحوبتين أبيض ، نربح 20 نقطة

- إذا كان لون الكرتين المسحوبتين أسود ، نخسر 20 نقطة

- إذا كانت الكرتان المسحوبتان مختلفتي اللون ، يكون الربح منعدم .

1. أحسب احتمال ربح 20 نقطة و احتمال خسارة 20 نقطة و احتمال تحقيق ربح منعدم 0,75

2. نعيد اللعبة السابقة خمس مرات

(أ) أحسب احتمال ربح 100 نقطة 0,5

(ب) أحسب احتمال ربح 40 نقطة 1

3. خلال لعبة واحدة ، نعتبر المتغير العشوائي X الذي يأخذ فقط القيم -20 عند الخسارة و 0 عندما يكون

الربح منعدما و +20 عند الربح	
(أ) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X	0,5
(ب) أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X	0,25

التمرين 3 : 2,5 ن

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2$	
لتكن M نقطة لحقها العدد العقدي غير المنعدم z و M' النقطة التي لحقها $z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$	
1. حدد العدد العقدي z لكي تكون النقطتان M و M' منطبقتين .	0,5
2. نفترض أن M تخالف النقطتين A و B لحقيهما على التوالي 1 و -1	
بين أن : $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2$	0,5
3. ليكن Δ واسط القطعة AB	
بين أن : إذا كانت M تنتمي إلى Δ فإن M' تنتمي إلى Δ	0,75
4. لتكن Γ الدائرة التي أحد أقطارها AB	
بين أن : إذا كانت M تنتمي إلى Γ فإن M' تنتمي إلى المستقيم AB	0,75

التمرين 4 : 10 ن

الجزء الأول :	
لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I = 0, +\infty$ بما يلي :	
$\forall x \in 0, +\infty \quad f(x) = \frac{\text{Arctan } x}{x}$ و $f(0) = 1$	
1. بين أن f متصلة على المجال I	0,5
2. (أ) ليكن x من I بين أن : $\forall t \in 0, x \quad \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$	0,5
(ب) بين أن : $\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arctan } x \leq x$	0,5
(ج) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0	0,75
3. (أ) علما أن f قابلة للاشتقاق على المجال $0, +\infty$ ، أحسب $f'(x)$ لكل x من $0, +\infty$	0,5
(ب) أدرس تغيرات الدالة f على المجال I	0,25

الجزء الثاني :	
لتكن g الدالة العددية المعرفة على $I = 0, +\infty$ بما يلي :	
$\forall x \in 0, +\infty \quad g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ و $g(0) = 1$	
1. (أ) بين أن : $\forall x \in 0, +\infty \quad f(x) \leq g(x) \leq 1$	0,5
(ب) بين g قابلة للاشتقاق على اليمين في 0	0,75

2. بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $0, +\infty$	0,75
و أن $\forall x \in 0, +\infty \quad g'(x) = \frac{1}{x} f(x) - g(x)$	
3. بين أن الدالة g تناقصية على المجال I	0,25
4. (أ) بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$ (لاحظ أن : $0 < \text{Arctan } x < \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in 0, +\infty$)	0,75
(ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$	0,5

<u>الجزء الثالث :</u>	
1. بين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $0,1$	0,75
2. (أ) تحقق أن : $\forall x \in 0, +\infty \quad 0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{1+x^2}$	0,5
(يمكن استعمال السؤال 2. (ب) الجزء الأول)	
(ب) بين أن $\forall x \in 0, +\infty \quad g'(x) \leq \frac{1}{2}$	0,75
3. لتكن u_n المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0 \in \mathbb{R}^+$ و $u_{n+1} = g(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$	
(أ) بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{2} u_n - \alpha $	0,75
(ب) بين أن المتتالية u_n متقاربة	0,75

تصحيح التمرين الأول

1.

✓ لدينا : $E \subset M_2 \mathbb{R}$

و $E \neq \emptyset$ ($I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E$ لأن $I = M_{1,0}$)

لتكن $M_{x,y}$ و $M_{a,b}$ من E وليكن α و β من $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha M_{a,b} + \beta M_{x,y} &= \alpha \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a + \beta x & -3\alpha b + \beta y \\ \alpha b + \beta y & \alpha a + \beta x \end{pmatrix} \\ &= M_{\alpha a + \beta x, \alpha b + \beta y} \in E \end{aligned}$$

$$\alpha a + \beta x, \alpha b + \beta y \in \mathbb{R}^2$$

إذن : E فضاء متجهي جزئي من $M_2 \mathbb{R}, +, \cdot$

✓

• لتكن $M_{x,y}$ من E

$$\begin{aligned} M_{x,y} &= \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3y \\ y & 0 \end{pmatrix} \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= x.I + y.J \end{aligned}$$

إذن I, J أسرة مولدة للفضاء E

• ليكن α و β من $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha.I + \beta.J = O &\Rightarrow M_{\alpha, \beta} = O \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

إذن I, J أسرة حرة للفضاء E

وبالتالي I, J أساس للفضاء E
و منه $\dim E = \text{card } I, J = 2$

2. أ) لنبين أن E جزء مستقر من $\mathbb{R}, \times M_2$

لدينا : $E \subset M_2 \mathbb{R}$ و $E \neq \emptyset$

لتكن $M_{x,y}$ و $M_{a,b}$ من E

$$\begin{aligned} M_{a,b} \times M_{x,y} &= \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax-3by & -3ay-3bx \\ bx+ay & -3by+ax \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax-3by & -3ay+bx \\ ay+bx & ax-3by \end{pmatrix} \\ &= M_{ax-3by, ay+bx} \in E \end{aligned}$$

$$ax-3by, ay+bx \in \mathbb{R}^2$$

إذن E جزء مستقر من $\mathbb{R}, \times M_2$

ب) لنبين أن $E, +, \times$ حلقة واحدة وتبادلية



✓ $E, +$ زمرة تبادلية (لأن $E, +, \cdot$ فضاء متجهي)

✓ بما أن E جزء مستقر من $\mathbb{R}, \times M_2$ و $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة ل $+$ في $M_2 \mathbb{R}$

فإن $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة ل $+$ في E

إذن $E, +, \times$ حلقة



✓ $I = M_{1,0}$ هو العنصر المحايد بالنسبة ل $\times$

إذن $E, +, \times$ حلقة واحدة



✓ $\times$ تبادلي في E

لتكن $M_{x,y}$ و $M_{a,b}$ من E

$$M_{a,b} \times M_{x,y} = M_{ax-3by, ay+bx}$$

$$M_{x,y} \times M_{a,b} = M_{xa-3yb, xb+ya}$$

$$M_{a,b} \times M_{x,y} = M_{x,y} \times M_{a,b} : E \text{ من } M_{a,b} \text{ و } M_{x,y}$$

وبالتالي : $E, +, \times$ حلقة واحدة وتبادلية

3. أ)

❖ ليكن a, b و x, y من $\mathbb{R}^2$

$$\varphi(a+ib) \times x+iy = \varphi(ax-by + i ay+bx) = M\left(ax-by, \frac{ay+bx}{\sqrt{3}}\right) \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \varphi(a+ib) \times \varphi(x+iy) &= M\left(a, \frac{b}{\sqrt{3}}\right) \times M\left(x, \frac{y}{\sqrt{3}}\right) \\ &= M\left(ax-3 \times \frac{b}{\sqrt{3}} \times \frac{y}{\sqrt{3}}, a \times \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{3}} \times x\right) \quad \checkmark \\ &= M\left(ax-by, \frac{ay+bx}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(E^*, \times)$

❖ ليكن $M(a, b)$ من E^*

لنحل المعادلة : $\varphi(x+iy) = M(a, b)$

$$\begin{aligned} \varphi(x+iy) = M(a, b) &\Leftrightarrow M\left(x, \frac{y}{\sqrt{3}}\right) = M(a, b) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ \frac{y}{\sqrt{3}} = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b\sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

إذن لكل $M(a, b)$ من E^* يوجد زوج وحيد $x, y = a, b\sqrt{3}$ من $\mathbb{R}^2$ بحيث :

$$\varphi(x+iy) = M(a, b)$$

ومنه φ تقابل من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو E^*

و بالتالي : φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(E^*, \times)$

(ب) بما أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(E^*, \times)$ و $(\mathbb{C}^*, \times)$ زمرة تبادلية فإن $(E^*, \times)$ زمرة تبادلية

(ج)

✓

$$\begin{aligned}
 J^{2017} &= M_{0,1}^{2017} \\
 &= \left(M \left(0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) \right)^{2017} \\
 &= \varphi_{0+i\sqrt{3}}^{2017} \\
 &= \varphi_{i\sqrt{3}}^{2017} \\
 &= \varphi_{\sqrt{3}^{2017} \times i} \\
 &= \varphi_{\sqrt{3}^{2016} \sqrt{3} \times i} \\
 &= \varphi_{3^{1008} \sqrt{3} \times i}
 \end{aligned}$$

✓

$$\begin{aligned}
 J^{2017}{}^{-1} &= \varphi_{3^{1008} \sqrt{3} \times i}^{-1} \\
 &= \varphi_{3^{1008} \sqrt{3} \times i}^{-1} \\
 &= \varphi \left(\frac{1}{3^{1008} \sqrt{3} \times i} \right) \\
 &= \varphi \left(\frac{-i}{3^{1008} \sqrt{3}} \right) \\
 &= \varphi \left(0 + i \left(\frac{-1}{3^{1008} \sqrt{3}} \right) \right) \\
 &= M \left(0, \frac{-\sqrt{3}}{3^{1008} \times \sqrt{3}} \right) \\
 &= M \left(0, \frac{-1}{3^{1008}} \right)
 \end{aligned}$$

.4

✓ لدينا $E, +, \times$ حلقة واحدة وتبادلية

✓ إذن يكفي أن نبين أن كل عنصر $M_{x,y}$ من M يقبل مقلوبا

ليكن $M_{x,y}$ من E بحيث : $M_{x,y} \neq M_{0,0}$

$$M_{x,y} = \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \text{ لدينا}$$

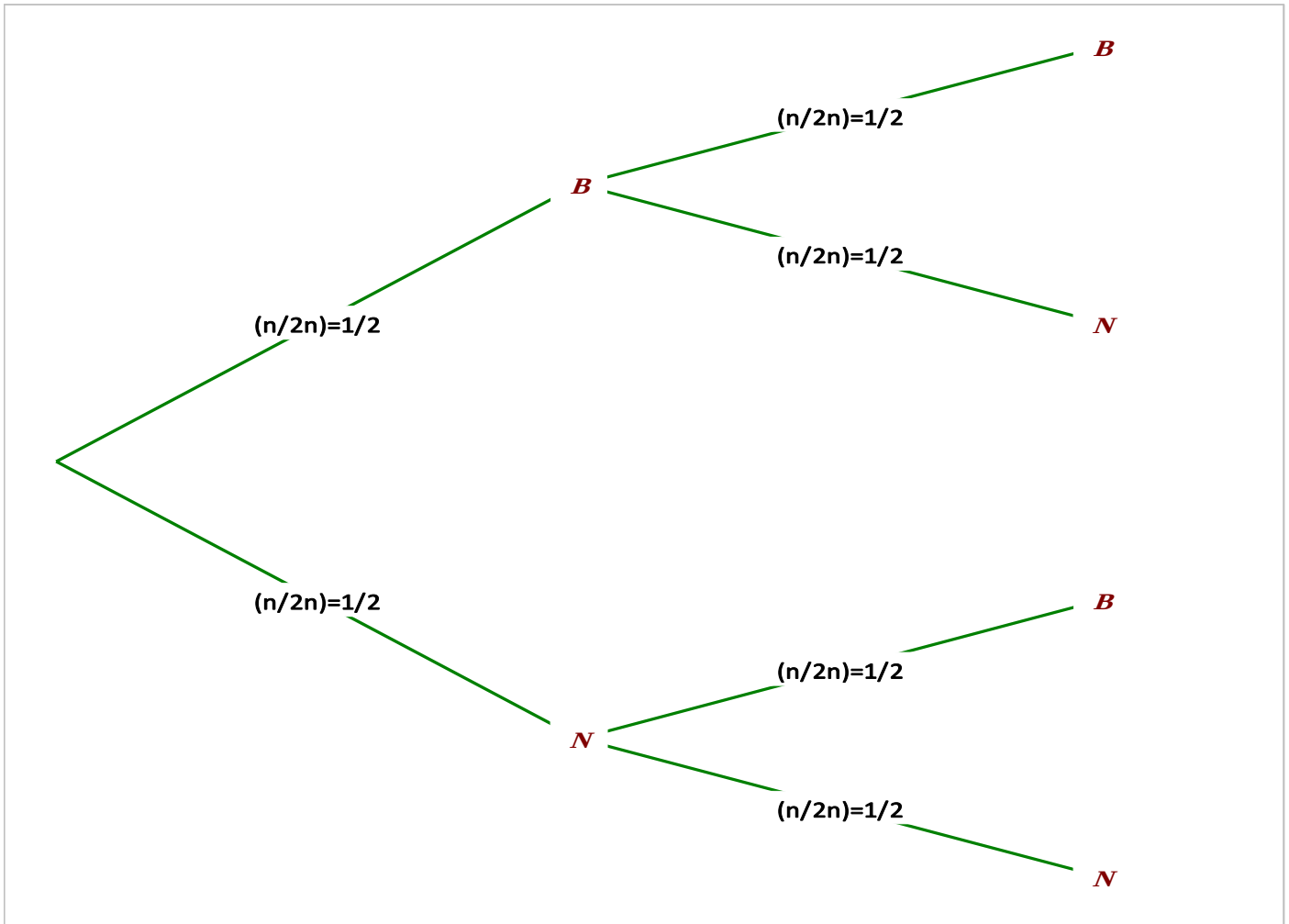
$$\det M_{x,y} = \begin{vmatrix} x & -3y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + 3y^2$$

إذن $\det M_{x,y} \neq 0$ (لأن $x, y \neq 0, 0$)

$$M_{x,y}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+3y^2} & \frac{3y}{x^2+3y^2} \\ \frac{-y}{x^2+3y^2} & \frac{x}{x^2+3y^2} \end{pmatrix} = M\left(\frac{x}{x^2+3y^2}, \frac{-y}{x^2+3y^2}\right) \in E^*$$

و بالتالي : $E, +, \times$ جسم تبادلي.

تصحيح التمرين الثاني



1. ليكن الحدث E " ربح 20 نقطة " بمعنى لون الكرتين المسحوبتين أبيض

$$p(E) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ليكن الحدث F " خسارة 20 نقطة " بمعنى لون الكرتين المسحوبتين أسود

$$p(F) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ليكن الحدث G " الربح منعدم " بمعنى الكرتان المسحوبتان مختلفتي اللون

$$p(G) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2. أ) لنحسب احتمال ربح 100 نقطة بمعنى تحقق الحدث E خمس مرات

$$C_5^5 p(E)^5 (1-p(E))^{5-5} = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \left(\frac{1}{4}\right)^5$$

ب) لنحسب احتمال ربح 40 نقطة بمعنى تحقق الحدث E مرتين

$$C_5^2 p(E)^2 (1-p(E))^{5-2} = 10 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{270}{1024} = \frac{135}{512}$$

$$p(X = -20) = p(F) = \frac{1}{4} \quad \text{أ) 3.}$$

$$p(X = 0) = p(G) = \frac{1}{2}$$

$$p(X = 20) = p(E) = \frac{1}{4}$$

قانون احتمال X

x_i	-20	0	20
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ب) الأمل الرياضي :

$$E(X) = \left(-20 \times \frac{1}{4}\right) + \left(0 \times \frac{1}{2}\right) + \left(20 \times \frac{1}{4}\right) = 0$$

تصحيح التمرين الثالث

1. ليكن $z \in \mathbb{C}^*$

M و M' منطبقتين تكافئ $z' = z$

$$\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = z \text{ تكافئ}$$

$$z = \frac{1}{z} \text{ تكافئ}$$

$$z^2 = 1 \text{ تكافئ}$$

$$z = 1 \text{ أو } z = -1 \text{ تكافئ}$$

2. ليكن $z \in \mathbb{C}^* - \{-1, 1\}$

$$\begin{aligned} \frac{z' + 1}{z' - 1} &= \frac{\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) + 1}{\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) - 1} \\ &= \frac{z + \frac{1}{z} + 2}{z + \frac{1}{z} - 2} \\ &= \frac{z^2 + 1 + 2z}{z^2 + 1 - 2z} \\ &= \frac{(z + 1)^2}{(z - 1)^2} \\ &= \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{إذن } \frac{z' + 1}{z' - 1} = \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right)^2 \text{ لكل } z \text{ من } \mathbb{C}^* - \{-1, 1\}$$

3. ليكن Δ واسط القطعة AB

نفترض أن M تنتمي إلى Δ

$$\text{إذن } AM = BM$$

$$\text{إذن } \frac{BM}{AM} = 1 \quad M \neq A$$

لنبين أن M' تنتمي إلى Δ

$$\frac{BM'}{AM'} = \frac{|z'+1|}{|z'-1|} = \frac{|z'+1|}{|z'-1|} = \left| \frac{z+1}{z-1} \right|^2 = \left(\frac{|z+1|}{|z-1|} \right)^2 = \left(\frac{BM}{AM} \right)^2 = 1^2 = 1$$

إذن $AM' = BM'$
و منه M' تنتمي إلى Δ

4. لتكن Γ الدائرة التي أحد أقطارها AB

نفترض أن M تنتمي إلى Γ

$$(\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}) \quad \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \equiv \frac{\pi}{2} \pi$$

$$\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pi$$

لنبين أن M' تنتمي إلى AB

$$\left(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{BM'} \right) \equiv \arg\left(\frac{z'+1}{z'-1}\right) 2\pi$$

$$\equiv \arg\left(\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\right) 2\pi$$

$$\equiv 2\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) 2\pi$$

$$\equiv \pi 2\pi$$

إذن A و B و M' نقط مستقيمة و منه M' تنتمي إلى AB

تصحيح التمرين الرابع

الجزء الأول :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I = 0, +\infty$ بما يلي :

$$\forall x \in 0, +\infty \quad f(x) = \frac{\text{Arctan } x}{x} \quad \text{و} \quad f(0) = 1$$

1. لنبين أن f متصلة على المجال I

✓ لندرس اتصال f في 0 على اليمين

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arctan } x}{x} = 1$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ فإن f في 0 على اليمين

✓ $f_1: x \mapsto \text{Arc tan } x$ متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص متصلة على $0, +\infty$

$f_2: x \mapsto x$ متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص متصلة على $0, +\infty$

و $\forall x \in 0, +\infty \quad f_2(x) \neq 0$

إذن $f = \frac{f_1}{f_2}$ متصلة على $0, +\infty$

خلاصة : f متصلة على المجال I

2. أُوُؤُؤُ (ليكن $x \in I = 0, +\infty$ و ليكن $t \in 0, x$)

لدينا : $0 \leq t \leq x$

إذن : $0 \leq t^2 \leq x^2$

إذن : $1 \leq 1+t^2 \leq 1+x^2$

و منه : $\forall t \in 0, x \quad \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

(ب) لدينا : $\forall t \in 0, x \quad \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

إذن : $\int_0^x \frac{1}{1+x^2} dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^x 1 dt$

إذن : $\left[\frac{t}{1+x^2} \right]_0^x \leq \text{Arc tan } t \Big|_0^x \leq t \Big|_0^x$

و منه : $\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arc tan } x \leq x$

(ج) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\text{Arc tan } x}{x} - 1}{x}$

لدينا : $\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arc tan } x \leq x$

إذن : $\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{\text{Arc tan } x}{x} \leq 1$

إذن : $\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{1}{1+x^2} - 1 \leq \frac{\text{Arc tan } x}{x} - 1 \leq 0$

إذن : $\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{-x}{1+x^2} \leq \frac{\frac{\text{Arc tan } x}{x} - 1}{x} \leq 0$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{1+x^2} = 0$

إذن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\text{Arc tan } x}{x} - 1}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \text{ : ومنه}$$

و بالتالي f قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا $f'_d(0) = 0$

3. أ) f قابلة للاشتقاق على $0, +\infty$ (كخارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $0, +\infty$)
ليكن $x \in 0, +\infty$: لدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\text{Arc tan } x}{x} \right)' \\ &= \frac{\text{Arc tan}'(x) \times x - \text{Arc tan } x \times x'}{x^2} \\ &= \frac{\frac{x}{1+x^2} - \text{Arc tan } x}{x^2} \end{aligned}$$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \text{Arc tan } x}{x^2} \quad \text{إذن :}$$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \text{Arc tan } x}{x^2} \quad \text{(ب) لدينا :}$$

و لدينا : $x^2 > 0 \quad \forall x \in 0, +\infty$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة : $\frac{x}{1+x^2} - \text{Arc tan } x$

حسب الجزء الأول . (2 ب) : $\frac{x}{1+x^2} - \text{Arc tan } x \leq 0$

إذن : $f'(x) \leq 0$

ومنه : f تناقصية .

الجزء الثاني :

1. أ) ليكن $t \in 0, +\infty$ و $x \in 0, +\infty$

$$\frac{t}{1+t^2} \leq \text{Arc tan } t \leq t \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{\text{Arc tan } t}{t} \leq 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^x \frac{\text{Arc tan } t}{t} dt \leq \int_0^x 1 dt \quad \text{إذن :}$$

$$\text{Arc tan } x \leq \int_0^x f(t) dt \leq x \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{\text{Arc tan } x}{x} \leq \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq 1 : \text{ إذن}$$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{\text{Arc tan } x}{x} \leq g(x) \leq 1 : \text{ و منه}$$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad f(x) \leq g(x) \leq 1 : \text{ لدينا (ب)}$$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad f(x) - 1 \leq g(x) - 1 \leq 0 : \text{ إذن}$$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{f(x) - 1}{x} \leq \frac{g(x) - 1}{x} \leq 0 : \text{ إذن}$$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \leq 0 : \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 : \text{ لدينا } f \text{ قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0 : \text{ إذن}$$

$$g'_d(0) = 0 : \text{ وبالتالي } g \text{ قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا}$$

$$2. \text{ أ) ليكن } x \in 0, +\infty$$

$$0, x \text{ متصلة على}$$

$$\text{و الدالة } x \mapsto x \text{ قابلة للاشتقاق على } 0, +\infty$$

$$\text{إذن الدالة } x \mapsto \int_0^x f(t) dt \text{ قابلة للاشتقاق على } 0, +\infty$$

$$\text{و لدينا : } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ قابلة للاشتقاق على } 0, +\infty$$

$$\text{و منه } g \text{ قابلة للاشتقاق على } 0, +\infty \text{ (كجاء دالتين قابلتين للاشتقاق على } 0, +\infty \text{)}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)' \\ &= \left(\frac{1}{x} \right)' \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{x} \left(\int_0^x f(t) dt \right)' \\ &= \frac{-1}{x^2} \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{x} f(x) \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{-1}{x} \int_0^x f(t) dt + f(x) \right) \\ &= \frac{1}{x} f(x) - g(x) \end{aligned}$$

و منه : $\forall x \in 0, +\infty \quad g'(x) = \frac{1}{x} f(x) - g(x)$

3. لدينا : $x > 0$ و لدينا : $f(x) - g(x) \leq 0$

إذن : $\forall x \in 0, +\infty \quad g'(x) \leq 0$

و منه g تناقصية على I

4. أ) ليكن $x > 1$ و ليكن $1 \leq t \leq x$

لدينا : $0 < \text{Arctant } t < \frac{\pi}{2}$

إذن : $0 < \frac{\text{Arctant } t}{t} < \frac{\pi}{2t}$

إذن : $0 < \int_1^x \frac{\text{Arctant } t}{t} dt < \int_1^x \frac{\pi}{2t} dt$

إذن : $0 < \int_1^x \frac{\text{Arctant } t}{t} dt < \frac{\pi}{2} \ln t \Big|_1^x$

إذن : $0 < \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt < \frac{\pi \ln x}{2x}$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$

ب) لدينا : $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt$

ليكن $t \in 0, 1$

لدينا : $0 \leq t \leq 1$ و f تناقصية

إذن : $f(1) \leq f(t) \leq f(0)$

إذن : $\frac{\pi}{4} \leq f(t) \leq 1$

إذن : $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(t) dt \leq 1$

إذن : $\frac{\pi}{4x} \leq \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt \leq \frac{1}{x}$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4x} = 0$

فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0 : \text{و لدينا كذلك}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 : \text{و منه}$$

الجزء الثالث :

1. لنبين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $0,1$

نعتبر الدالة $h: x \mapsto g(x) - x$

✓ h متصلة على $0,1$

✓ h قابلة للاشتقاق على $0,1$ و لدينا : $h'(x) = g'(x) - 1 < 0$ (لأن $g'(x) \leq 0$)

إذن h تناقصية قطعاً على $0,1$

✓ ولدينا : على $h(0) = g(0) - 0 = 1 > 0$ و $h(1) = g(1) - 1 = \int_0^1 f(t) dt - 1 < 0$

إذن : $h(0) \times h(1) < 0$

و منه حسب مبرهنة القيم الوسيطة بالوحدانية : $\exists! \alpha \in 0,1$ $g(\alpha) = 0$

2. أ) ليكن $x \in 0, +\infty$

$$\text{لدينا : } 1 - f(x) = 1 - \frac{\text{Arctan } x}{x}$$

حسب الجزء الأول . (2 ب) : $\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arctan } x \leq x$

$$\text{إذن : } \forall x \in 0, +\infty \quad \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{\text{Arctan } x}{x} \leq 1$$

$$\text{إذن : } \forall x \in 0, +\infty \quad -1 \leq -\frac{\text{Arctan } x}{x} \leq -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{إذن : } \forall x \in 0, +\infty \quad 0 \leq 1 - \frac{\text{Arctan } x}{x} \leq 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{و منه : } \forall x \in 0, +\infty \quad 0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{1+x^2}$$

(ملاحظة النتيجة تبقى صحيحة في حالة $x = 0$)

ب) ليكن $x \in 0, +\infty$

$$\text{لدينا : } 0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\text{إذن : } -1 \leq -f(x) \leq \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\text{إذن : } \frac{1}{1+x^2} \leq f(x) \leq 1$$

$$\text{إذن : } \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x 1 dt$$

$$\text{إذن : } \text{Arc tan } x \leq \int_0^x f(t) dt \leq x$$

$$\text{إذن : } f(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq 1$$

$$\text{إذن : } f(x) \leq g(x) \leq 1$$

$$\text{إذن : } 0 \leq g(x) - f(x) \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\text{إذن : } 0 \leq \frac{1}{x} (g(x) - f(x)) \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{و منه : } \forall x \in]0, +\infty[\quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

3. أ) ليكن $n \in \mathbb{N}$: لدينا :

✓ g متصلة على المجال المغلق الذي طرفاه u_n و α

✓ g قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح الذي طرفاه u_n و α

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$\text{إذن حسب متباينة التزايد المتناهية : } |g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

$$\text{وبما أن } u_{n+1} = g(u_n) \text{ و } \alpha = g(\alpha)$$

$$\text{فإن : } \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

$$\text{ب) لتتبع بالترجع : } \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

✓ من أجل $n=0$:

$$|u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha| \text{ و } \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha| \text{ لدينا}$$

$$|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha| \text{ إذن}$$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$\blacksquare \text{ نفترض أن : } |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\blacksquare \text{ و نبين أن : } |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha| \text{ ؟}$$

$$\text{لدينا حسب الافتراض : } |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\boxed{a} \text{ إذن : } \left| \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha| \right|$$

$$\boxed{b} \text{ و حسب نتيجة السؤال السابق : } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

$$\text{من } \boxed{a} \text{ و } \boxed{b} \text{ نستنتج : } |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

$$\checkmark \text{ نستنتج : } \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\text{بما أن } -1 < \frac{1}{2} < 1 \text{ فإن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ و منه : } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$$

$$\text{و بالتالي المتتالية } u_n \text{ متقاربة ولدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

つづ<