المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2015
- الموضوع -

NS 25

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	المعامل	9

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux nombres complexes……(3pts)
- Le deuxième exercice se rapporte à l'arithmétique……...….(3 pts)
- Le troisième exercice se rapporte aux structures algébriques…..(4 pts)
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse……....(6.5 pts)
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse……...…..(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

+ | inscription.ma

EXERCICE 1: (3points)

1-On considère dans l'ensemble □ l'équation suivante:

$$(E):\ z^2 - \left(5+i\sqrt{3}\right)z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$$

0.25 a) Vérifier que $\left(3-i\sqrt{3}\right)^2$ est le discriminant de l'équation (E).

0.5 b) Déterminer a et b les deux solutions de l'équation (E) (sachant que : b ج ،)

0.25 c) Vérifier que: $b=\left(1-i\sqrt{3}\right)a$

2- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.
Soit A le point d'affixe a et B le point d'affixe b.

0.5 a) Déterminer b_1 l'affixe du point B_1 image du point O par la rotation de centre A et d'angle $\frac{p}{2}$

0.5 b) Montrer que B est l'image de B_1 par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{3}$

0.5 c) Vérifier que : $arg\left(\frac{b}{b-a}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\left[2\pi\right]$

0.5 d) Soit C un point, d'affixe c, appartenant au cercle circonscrit au triangle OAB et différent de O et de A. Déterminer un argument du nombre complexe $\frac{c}{c-a}$

EXERCICE 2: (3points)

Soit x un nombre entier relatif tel que: x^{1439} ؛ $1436\ [2015]$

0.25 1-Sachant que: $1436\times 1051 - 2015\times 749 = 1$, montrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

2- Soit d un diviseur commun de x et de 2015

0.5 a) Montrer que d divise 1436

0.5 b) En déduire que x et 2015 sont premiers entre eux.

0.75 3-a) En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que:
$x^{1440}\equiv 1\ [5]$ et $x^{1440}\equiv 1\ [13]$ et $x^{1440}\equiv 1\ [31]$ (remarquer que: $2015 = 5.13.31$)

0.5 b) Montrer que : $x^{1440}\equiv 1\ [65]$ et en déduire que: $x^{1440}\equiv 1\ [2015]$

0.5 4-Montrer que: x ؛ $1051\ [2015]$

EXERCICE 3: (4 points)

On rappelle que $\left(M_2(\text{ ج ، }),+,\times\right)$ est un anneau unitaire dont l'unité est $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et que

$(\square,+)$ est un groupe commutatif. Pour tout nombre réel x, on pose $M(x)=\begin{pmatrix}1-x & x\\ -2x & 1+2x\end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble $E=\{M(x)/\ x$ ج ، $\}$

On munit E de la loi de composition interne T définie par:

$$(\forall (x,y)\text{ ج ، }^2)\quad M(x)\,\mathrm{T}\,M(y)=M(x+y+1)$$

+ | inscription.ma

1- Soit j l'application de ‹ dans E définie par : $(\forall x \in ‹)\quad j(x) = M(x-1)$

0.5 a)Montrer que j est un homomorphisme de $(‹, +)$ vers (E, T)

0.5 b) Montrer que (E, T) est un groupe commutatif.

0.5 2- a) Montrer que: $(\forall (x,y) \in ‹^2)\quad M(x) \prime M(y) = M(x+y+xy)$

0.5 b) En déduire que E est une partie stable de $(\mathrm{M}_2(‹), \prime)$ et que la loi « $\prime$ » est commutative dans E.

0.5 c) Montrer que la loi « $\times$ » est distributive par rapport à la loi « T » dans E.

0.5 d) Vérifier que: $M(-1)$ est l'élément neutre dans (E, T) et que I est l'élément neutre dans $(E, \prime)$.

0.25 3- a) Vérifier que : $(\forall x \in ‹ - \{-1\})\quad M(x) \prime M\left(\frac{-x}{1+x}\right) = I$.

0.75 b) Montrer que $(E, \mathrm{T}, \prime)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 4: (6.5points)

Première partie: Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par:

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = x\left(1 + \ln^2 x\right) \quad \text{pour } x > 0$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0.5 1- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 2-a)Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

0.5 b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 c) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$, en déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

0.25 3-a) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I d'abscisse e^{-1}.

0.25 b) Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à la droite d'équation: $y = x$

0.5 c) Tracer la courbe (C). (On prendra $e^{-1} = 0.4$)

Deuxième partie: On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par:

$$u_0 = e^{-1} \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N})\quad u_{n+1} = f(u_n)$$

0.5 1-Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N})\quad e^{-1} \leq u_n < 1$

0.5 2- Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante, en déduire qu'elle est convergente.

3- On pose: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

inscription.ma

0.25 a) Montrer que: $e^{-1} \leq l \leq 1$

0.5 b) Déterminer la valeur de l

Troisième partie: Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par:

$$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$$

0.25 1-a) Montrer que la fonction $H : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2 \ln x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto x\ln x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$

0.5 b) Montrer que: $(\forall x>0)$ $\int_1^x t\ln^2(t)\,dt = \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int_1^x t\ln(t)\,dt$

0.5 c) En déduire que: $(\forall x>0)$ $F(x) = -\frac{3}{4}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln(x)+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)$

0.25 2-a) Montrer que la fonction F est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$

0.5 b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$

EXERCICE5:(3.5points)

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par:

$$g(0)=\ln 2 \quad \text{et} \quad g(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}\,dt \quad \text{pour} \quad x>0$$

0.5 1-a) Montrer que: $(\forall x>0)$ $(\forall t\in[x,2x])$ $e^{-2x}\leq e^{-t}\leq e^{-x}$

0.5 b) Montrer que: $(\forall x>0)$ $e^{-2x}\ln 2 \leq g(x) \leq e^{-x}\ln 2$

0.25 c) En déduire que la fonction g est continue à droite en 0.

0.75 2- Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$, puis calculer $g'(x)$ pour $x>0$

0.5 3-a) Montrer que: $(\forall t>0)$ $-1\leq \frac{e^{-t}-1}{t}\leq -e^{-t}$

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis)

0.5 b) Montrer que: $(\forall x>0)$ $-1\leq \frac{g(x)-\ln 2}{x}\leq \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$

0.5 c) En déduire que la fonction g est dérivable à droite en 0 .

FIN

+ | inscription.ma

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2015
- عناصر الإجابة -

NR 25

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعبة أو المسلك

EXERCICE1	ELEMENTS de REPONCES	Barèmes des notes
1- a)		0.25
b)	$a=1+i\sqrt{3}$ et $b=4$	0.5
c)		0.25
2- a)	$b_1=a(1-i)=(1+i\sqrt{3})(1-i)$	0.5
b)	On vérifie que: $b-a=\sqrt{3}(b_1-a)$	0.5
c)	On obtient : $\frac{b}{b-a}=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{p}{6}}$ et donc $arg\left(\frac{b}{b-a}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$	0.5
d)	Les points O, A, B, C sont cocycliques donc $\frac{c}{c-a}$, $\frac{b}{b-a}$ خ ، et on obtient $arg\left(\frac{c}{c-a}\right)\equiv\frac{p}{6}[p]$ On attribuera 0.25 pour le résultat $arg\left(\frac{c}{c-a}\right)\equiv\frac{p}{6}[2p]$	0.5

EXERCICE2	ELEMENTS de REPONCES	Barèmes des notes
1-	théorème de BEZOUT à partir de la remarque, ou toute autre méthode juste	0.25
2- a)		0.5
b)		0.5
3- a)	théorème de FERMAT trois fois(0.25 pour chacune des trois	0.75

+ | inscription.ma

	applications)	
b)	5et13 sont premiers entre eux.....0.25 65et31 sont premiers entre eux 0.25	**0.5**
c)	Application des deux résultats: x^{1439} ؛ $1436\ [2015]$ et $1436' \ 1051- \ 2015' \ 749 = 1$	**0.5**

EXERCICE3	**ELEMENTS de REPONCES**	**Barèmes des notes**
1-a)	homomorphisme	**0.5**
b)	$j(\text{،}) = E$ .....0.25 L'image homomorphe d'un groupe.....0.25	**0.5**
2-a)	L'égalité	**0.5**
b)	Déduction.....0.25 Commutativité.....0.25	**0.5**
c)	Distributivité	**0.5**
d)	$M(-1)$ est l'élément neutre .....0.25 I est l'élément neutre 0.25	**0.5**
3- a)	L'égalité	**0.25**
b)	déduire de la question 3-a) que tout élément de E différent de $M(-1)$ est inversible.....0.25 Pour le reste des axiomes d'un corps commutatif.....0.5	**0.75**

EXERCICE4		**ELEMENTS de REPONCES**	**Barèmes des notes**
Première partie	**1-**	Calcul de limites.....0.25 Interprétation 0.25	**0.5**

+ | inscription.ma

	2- a)		**0.25**
	b)	Calcul de limites.....0.25 Interprétation 0.25	**0.5**
	c)	Calcul de dérivé.....0.25 Monotonie.....0.25	**0.5**
	3- a)		**0.25**
	b)		**0.25**
	c)	On tiendra compte du point d'inflexion , branche infinie et demi tangente	**0.5**
Deuxième partie	**1-**		**0.5**
	2-	Monotonie.....0.25 Convergence.....0.25	**0.5**
	3- a)		**0.25**
	b)	$l=1$	**0.5**
Troisième partie	**1- a)**		**0.25**
	b)		**0.5**
	c)		**0.5**
	2- a)		**0.25**
	b)	$\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=-\frac{3}{4}$ .....0.25 $\int_0^1 f(x)dx=-F(0)=-\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=\frac{3}{4}$ .....0.25 Puisque la fonction F est continue à droite en 0.	**0.5**

+ | inscription.ma

EXERCICE5	ELEMENTS de REPONCES	Barèmes des notes
1- a)		0.5
b)		0.5
c)		0.25
2-	Dérivabilité.....0.25 $g'(x)=\dfrac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$ 0.5	0.75
3- a)		0.5
b)	Application de TAF $(\forall t>0)\quad(\exists s\in]0,t[)\qquad :\dfrac{e^{-t}-1}{t}=-e^{-s}$ Puis Encadrement de e^{-s} ou toute autre méthode juste	0.5
c)	$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}=-1$ .....0.25 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=-1$ et l'interprétation du résultat 0.25	0.5

+ | inscription.ma