

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا 2015 - الدورة الاستدراكية

الشعب (ة) أو المسلك: شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

مادة الرياضيات

تمرين رقم 1

نعتبر المتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_1 = 4$ و $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$ لكل n من \mathbb{N}

1- بين بالترجع أن $u_n < 5$ لكل n من \mathbb{N}

2- تحقق من أن $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$ لكل n من \mathbb{N} ثم استنتج أن المتالية (u_n) تزايدية.

3- استنتاج أن المتالية (u_n) متقاربة.

4- لتكن (v_n) المتالية العددية بحيث $v_n = 5 - u_n$ لكل n من \mathbb{N}

أ- بين أن (v_n) متالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ ثم اكتب v_n بدلالة n

ب- استنتاج أن $u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من \mathbb{N} واحسب نهاية المتالية (u_n) .

تمرين رقم 2

نعتبر ، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعمد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، المستوى (P) الذي معادلته $2x - z - 2 = 0$ والفلكة

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 0$ التي معادلتها (S)

1- بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $(-1, 0, 1)$ وأن شعاعها هو 3

2- أحسب مسافة النقطة Ω عن المستوى (P)

ب- استنتاج أن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ)

3- بين أن شعاع الدائرة (Γ) هو 2 وحدد مثلث إحداثيات النقطة H مركز الدائرة (Γ)

تمرين رقم 3

1-أ- حل في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 8z + 32 = 0$

ب- نعتبر العدد العقدي $a = 4 + 4i$ بحيث

اكتب العدد العقدي a على الشكل المثلث ثم استنتاج أن a^{12} عدد حقيقي سالب.

2- نعتبر في المستوى العقدي إلى معلم متعمد ممنظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) النقط A و B و C التي أحقها على التوالي هي

$c = 3 + 4i$ و $b = 2 + 3i$ و $a = 4 + 4i$ بحيث a و b و c

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- بين أن $z' = iz + 7 + i$

ب- تتحقق من أن d لحق النقطة D صورة النقطة A بالدوران R هو $3 + 5i$

ج- بين أن مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث $|z - 4 - 4i| = |z - 3 - 5i|$ هي المستقيم (BC)

يحتوي صندوق على 5 بيدقان بيضاوان و بيدقان خضروان و بيدقة حمراء واحدة (لا يمكن التمييز بين البيدقات باللمس).
نسحب عشوائيا بالتابع و بإحلال ثلاثة بيدقات من الصندوق.

1- ليكن A الحدث : «البيدقان الثلاث المسحوبة من نفس اللون» .

$$P(A) = \frac{17}{125}$$

2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد البيدقات البيضاء المسحوبة .

- حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty]$ بما يلي :

1-أ- بين أن $g'(x) = \ln x$ لكل x من $[0, +\infty]$

ب- بين أن الدالة g تناصصية على $[0, 1]$ وتزايدية على $[1, +\infty]$

2- أحسب $g(1)$ واستنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من $[0, +\infty]$

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0, +\infty]$ بما يلي :

ول يكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعمد ممنظم (O, i, j) (الوحدة : $1cm$)

1- بين أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ و أول هندسيا النتيجة

(حساب) $f(x) = \frac{3x^2 - 1 - 2x \ln x}{x^2}$ لاحظ أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ لكل x من $[0, +\infty]$

2- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ واستنتج طبيعة الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار ∞

3-أ- بين أن $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$ لكل x من $[0, +\infty]$

ب- أول هندسيا النتيجة $f'(1) = 0$

ج- بين أن الدالة f تزايدية على $[0, +\infty]$

4- أنشئ ، في المعلم (j, i, O) ، المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف أقصى إحداهما 1 وأقصى الأخرى محصور بين 2 و 2.5 ونأخذ $f(0, 3) = 0$)

$$\int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx = 1$$

ب- أحسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاسيل و المستقيمين اللذين معادلاتها

$$x = e \quad x = 1$$

6- لتكن h الدالة العددية المعرفة على IR^* بما يلي :

أ- بين أن الدالة h زوجية وأن $h(x) = f(x)$ لكل x من $[0, +\infty]$

ب- أنشئ ، في نفس المعلم (j, i, O) ، المنحنى (C) الممثل للدالة h .

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا 2015 - الدورة الاستدراكية -

الشعب (ة) أو المسلك: شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

مادة الرياضيات

$$= \frac{4}{5}(5 - U_n)$$

$$V_{n+1} = \frac{2}{5} V_n$$

ومنه المتالية $(V_n)_n$ هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ وحدتها الأولى:

$$V_0 = 5 - U_0 = 5 - 4 = 1$$

: V_n بدلالة n

بما أن المتالية $(V_n)_n$ هندسية فإن:

$$(\forall n \in IN) ; V_n = V_0 \cdot q^n$$

$$(\forall n \in IN) ; V_n = 1 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$(\forall n \in IN) ; V_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

ب- استنتاج:

$(\forall n \in IN) ; V_n = 5 - U_n$ لدينا:

$$(\forall n \in IN) ; U_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

: $(U_n)_n$ نهاية

$(\forall n \in IN) ; U_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$ لدينا:

وبما أن:

$$\lim \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$$

لأن:

$$-1 < \frac{2}{5} < 1$$

$\lim U_n = 5$ فإن:

تمرين رقم 2

1- لدينا: معادلة (S) هي:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$$

ومنه:

$$(x+1)^2 - 1 + y^2 + (z-1)^2 - 1 - 7 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = 3^2$$

و منه مركز (S) هو النقطة $\Omega(-1, 0, 1)$ وشعاعها هو

$$R=3$$

تمرين رقم 1

1- نبين بالترجع أن: $(\forall n \in IN) ; U_n < 5$

من أجل $n=0$ لدينا $U_0 = 4$ و $4 < 5$

إذن: $U_n < 5$

نفترض أن $U_n < 5$ ولنبين أن: $U_{n+1} < 5$

$$U_{n+1} - 5 = \frac{2}{5} U_n + 3 - 5$$

$$= \frac{2}{5} U_n - 2$$

$$= \frac{2}{5}(U_n - 5)$$

وبما أن $U_n - 5 < 0$ فإن $U_n < 5$

ومنه $U_{n+1} < 5$ أي $U_{n+1} - 5 < 0$

و بالتالي: $(\forall n \in IN) ; U_n < 5$

* التحقق من المتساوية:

$$(\forall n \in IN) ; U_{n+1} - U_n = \frac{2}{5} U_n + 3 - U_n$$

$$= \left(\frac{2}{5} - 1\right) U_n + 3$$

$$= -\frac{3}{5} U_n + 3$$

$$= \frac{3}{5}(5 - U_n)$$

* استنتاج:

نعلم أن $(\forall n \in IN) ; U_n < 5$

ومنه: $(\forall n \in IN) ; 5 - U_n > 0$

إذن: $0 < U_{n+1} - U_n < 0$

وهذا يعني أن المتالية $(U_n)_n$ تزايدية قطعاً.

3- بما أن المتالية $(U_n)_n$ تزايدية و مكبورة بالعدد 5 ، فإنها متقاربة .

4- أ- نبين أن $(V_n)_n$ هندسية

$$(\forall n \in IN) ; V_{n+1} = 5 - U_{n+1}$$

$$= 5 - \frac{2}{5} U_n - 3$$

$$= 2 - \frac{2}{5} U_n$$

$$\begin{cases} x_H = -1 + 2 = 1 \\ y_H = 0 \\ z_H = 1 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{إذن: } H(1,0,0) \quad \text{أي:}$$

تمرين رقم 3

1- أ- حل المعادلة: $z^2 - 8z + 32 = 0$

لدينا: $\Delta = 64 - 128 = -64$

$$z_1 = \frac{8 + 8i}{2} = 4 + 4i \quad \text{و منه:}$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = 4 - 4i \quad \text{و}$$

$$S = \{4 - 4i, 4 + 4i\} \quad \text{و منه:}$$

2- * لدينا: $a = 4 + 4i$

$$|a| = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2} \quad \text{و منه:}$$

$$a = 4\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{إذن:}$$

$$a = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$a = \left[4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right] \quad \text{إذن:}$$

$$a^{12} = \left[4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right]^{12} \quad \text{استنتاج: *}$$

$$= \left[(4\sqrt{2})^{12}; 12 \frac{\pi}{4} \right]$$

$$= [2^{30}; 3\pi] = [2^{30}; 3]$$

$$= 2^{30}(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$= -2^{30}$$

$$a^{12} \in IR^- \quad \text{إذن:}$$

2- لدينا:

$$M' = R(M) \Leftrightarrow z' - c = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - c)$$

$$\Leftrightarrow z' - c = i(z - c)$$

$$\Leftrightarrow z' = iz - ic + c$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + (1 - i)c$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + (1 - i)(3 + 4i)$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + 3 + 4i - 3i + 4$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + 7 + i$$

$$d(\Omega, P) = \frac{|2x_{\Omega} - z_{\Omega} - 2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|-2 - 1 - 2|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

ب- استنتاج:

لدينا: $d(\Omega, P) = \sqrt{5}$ و $R = 3$

وبما أن: $(5 < 9)$ لأن $\sqrt{5} < 3$

فإن: $d(\Omega, P) < R$

ومنه المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ)

3- ليكن r شعاع الدائرة (Γ)

$$r = \sqrt{R^2 - d(\Omega, P)^2} \quad \text{نعلم أن:}$$

$$r = \sqrt{9 - 5} = 2 \quad \text{فإن:}$$

* إحداثيات H مركز الدائرة (Γ)

لدينا H هي تقاطع المستوى (P) والمستقيم (Δ) المار من

Ω العمودي على المستوى (P) لأن H هي المسقط العمودي

ل Ω على (P)

لدينا $(P) \cap (\Delta) \perp (P)$ إذن (Δ) موجه بالتجهيز $\vec{n}_P(2, 0, -1)$

المنتظمة على (P)

ومنه تمثيل بارامטרי لـ (Δ) هو النقطة

$$\begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 0 \\ z = 1 - k \end{cases} \quad (k \in IR) \quad H \in (P) \Leftrightarrow 2x_H - z_H - 2 = 0 \quad (1)$$

$$H \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -1 + 2k \\ y_H = 0 \\ z_H = 1 - k \end{cases} \quad \text{نجد:}$$

$$-2(1 + 2k) - (1 - k) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 + 4k - 1 + k - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5k = 5$$

$$\Leftrightarrow k = 1$$

إذن المجموعة المطلوبة هي المستقيم (Δ) الذي معادلته هي :

$$x - y + 1 = 0$$

وبما أن $B \in (\Delta)$ و $C \in (\Delta)$

(تحقق من ذلك بالأخذ في الاعتبار)

فإن : $(\Delta) = (BC)$

تمرين رقم 4

ليكن Ω كون الإمكانيات

بما أن السحب تتبع و يحلل

فإن كل سحبة هي ترتيبة بتكرار.

$Card\Omega = 5^3 = 125$: ومنه :

1- احتمال الحدث A

$A = \{BBB; VVV; RRR\}$: لدينا :

$CardA = 2^3 + 2^3 + 1^3 = 17$: ومنه :

$p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{17}{125}$

: X قيم *

قيمة X	نوع السحبات
0	$\overline{B} \ \overline{B} \ \overline{B}$
1	$\overline{B} \ \overline{B} \ B$
2	$\overline{B} \ B \ B$
3	$B \ B \ B$

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$: ومنه

قانون احتمال X *

$$p(X = 0) = \frac{3^3}{125} = \frac{27}{125}$$

$$p(X = 1) = \frac{3 \cdot 2^1 \cdot 3^2}{125} = \frac{54}{125}$$

$$p(X = 2) = \frac{3 \cdot 2^2 \cdot 3^1}{125} = \frac{36}{125}$$

$$p(X = 3) = \frac{2^3}{125} = \frac{8}{125}$$

تحقق بسرعة أن :

$$p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = 1$$

بـ لدينا D صورة A بالدوران R

$$D = R(A) \Leftrightarrow d = ia + 7 + i \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow d = i(4 + 4i) + 7 + i$$

$$\Leftrightarrow d = 4i - 4 + 7 + i$$

$$\Leftrightarrow d = 3 + 5i$$

جـ طريقة (1) :

$$|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i|$$

$$\Leftrightarrow |z - (3 + 5i)| = |z - (4 + 4i)|$$

$$\Leftrightarrow |z_M - z_D| = |z_M - z_A|$$

$$\Leftrightarrow DM = AM$$

إذن المجموعة المطلوبة هي واسط القطعة $[AD]$

بما أن المثلث ACD قائم الزاوية و متساوي الساقين في

(لأن $R(A) = D$)

فإن واسط القطعة $[AD]$ يمر من C

و بما أن : $AB = |b - a| = |-2 - i| = \sqrt{5}$

$DB = |b - d| = |-1 - 2i| = \sqrt{5}$

$AB = DB$ أي :

فإن واسط القطعة $[AD]$ يمر أيضا من B

إذن واسط القطعة $[AD]$ هو المستقيم (BC)

طريقة (2) :

$(x \in IR, y \in IR) \quad z = x + iy$ نضع :

$$|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i| \quad \text{و منه :}$$

$$\Leftrightarrow |x + iy - 3 - 5i| = |x + iy - 4 - 4i|$$

$$\Leftrightarrow |(x - 3) + i(y - 5)| = |(x - 4) + i(y - 4)|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 5)^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 4)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = (x - 4)^2 + (y - 4)^2$$

$$\Leftrightarrow -6x + 9 - 10y + 25 = -8x + 16 - 8y + 16$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y + 1 = 0$$

$\forall x \in]0, +\infty[;$

لدينا :

$$f'(x) = \left(3 - \frac{1}{x^2} - 2 \frac{\ln x}{x} \right)'$$

$$= \frac{2x}{x^4} - 2 \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{2}{x^3} - 2 \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right)$$

$$= \frac{2}{x^3} (1 - x + x \ln x)$$

$$= \frac{2}{x^3} g(x)$$

$$\text{بـ } f'(1) = \frac{2}{1^3} \cdot g(1) = 0$$

ومنه (C) يقبل مماساً أفقياً في النقطة التي أقصولها 1.

جـ- لـديـنا : $\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$

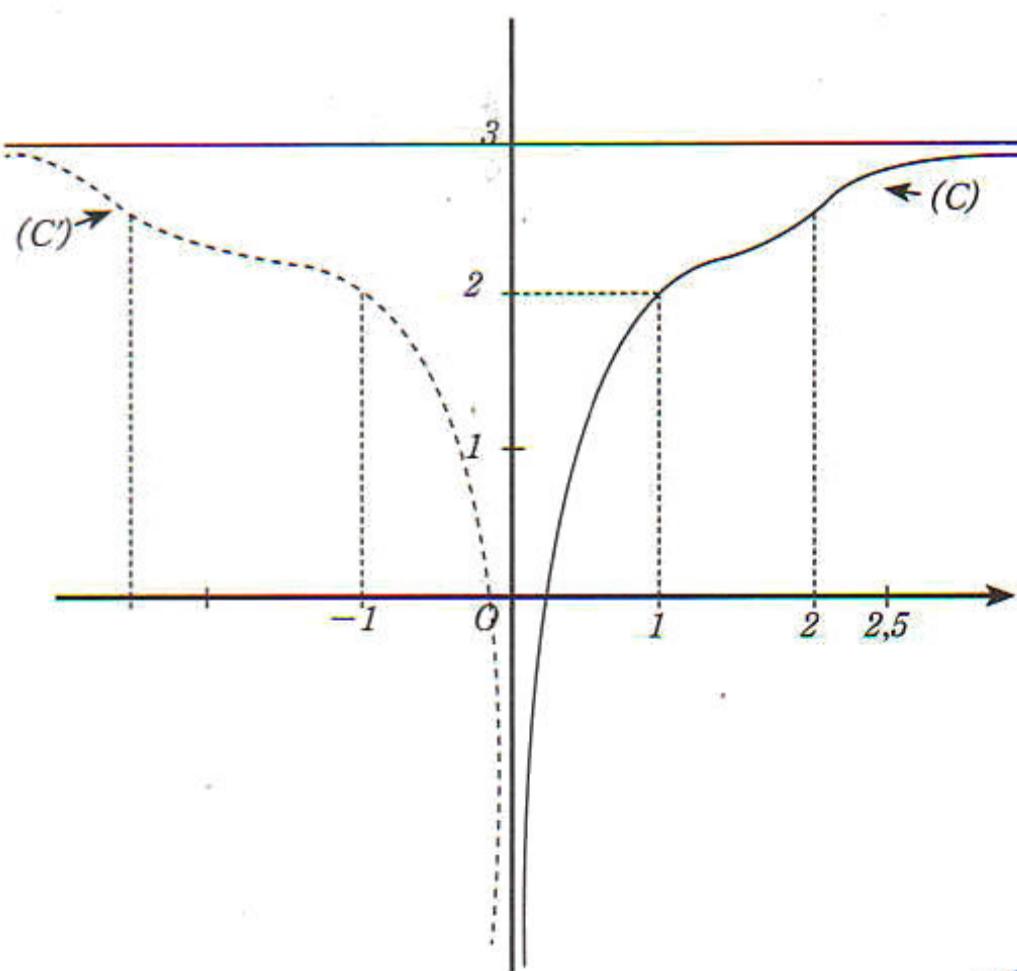
$g(x) \geq 0$ و $\frac{2}{x^3} > 0$ وبـما أن $]0; +\infty[$ لكل x من المجال

$\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) \geq 0$ فإن

إذن f تزايدية على $]0; +\infty[$

- إنشاء (C) : - جدول تغيرات f هو :

x		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$		$\rightarrow 3$



- I

$\forall x \in]0, +\infty[; g'(x) = (1 - x + x \ln x)'$

$$g'(x) = -1 + (1 + \ln x)$$

$$= \ln x$$

بـ إشارة $g'(x)$ هي إشارة $\ln x$

وبـما أن $\forall x \in]0, 1] ; \ln(x) \leq 0$

فـإن : $\forall x \in]0, 1] ; g'(x) \leq 0$

إذن g تنقصـية على المجال $]0, 1]$

وبـما أن $\forall x \in [1, +\infty[; \ln(x) \geq 0$

فـإن : $\forall x \in [1, +\infty[; g'(x) \geq 0$

إذن g تزاـيدـية على المجال $[1; +\infty[$

$$g(1) = 1 - 1 + 1 \ln 1 = 0 \quad * - 2$$

* لـديـنا g تـقـبـل قـيـمة دـنـيـا هـي (1) عـلـى $]0; +\infty[$

إذن $\forall x \in]0, +\infty[; g(x) \geq g(1)$

وـمنـه $\forall x \in]0, +\infty[; g(x) \geq 0$

- II

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 - \frac{1}{x^2} - 2 \frac{\ln x}{x} \quad * - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 - \frac{1}{x^2} (1 + 2x \ln x) \quad \left(\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x^2} = -\infty \quad \text{لـأن} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + 2x \ln x = 1 \quad \text{وـ} \end{array} \right)$$

* هـندـسـيـا :

(C) يـقـبـل مـقـارـبـا عمـودـيـا معـادـلـتـه $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{1}{x^2} - 2 \frac{\ln x}{x} = 3 \quad 2$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{وـ} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{لـأن:} \right)$$

هـندـسـيـا (C) يـقـبـل مـقـارـبـا أـفـقـيـا معـادـلـتـه $y=3$ بـجـوار $+\infty$

3- أـ لـنبـين أـن :

$$\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$$

5-أ- لنبين أن

$$\int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx = 1$$

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{2 \ln(x)}{x} dx &= 2 \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx \\ &= 2 \ln'(x) \cdot (\ln x)^1 dx \\ &= [\ln^2(x)]_1^e \\ &= \ln^2(e) - \ln^2(1) = 1 \end{aligned}$$

ب- المساحة المطلوبة هي :

$$A = \int_1^e |f(x)| dx \quad (ua)$$

و بما أن

$$A = \int_1^e f(x) dx \quad (ua)$$

$$= \int_1^e \left(3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x} \right) dx \quad (ua)$$

$$= \left(\int_1^e \left(3 - \frac{1}{x^2} \right) dx - \int_1^e \left(\frac{2 \ln x}{x} \right) dx \right) \quad (ua)$$

$$A = \left(\left[3x + \frac{1}{x} \right]_1^e - 2 \right) \quad (ua)$$

$$= \left(3e + \frac{1}{e} - 4 - 2 \right) \quad (ua)$$

$$= \left(\frac{3e^2 + 1 - 6e}{e} \right) cm^2$$

6-أ- لنبين أن الدالة h زوجية .

لدينا : لكل من IR^* $-x$, IR^* ينتمي إلى

$$h(-x) = 3 - \frac{1}{(-x)^2} - \frac{\ln((-x)^2)}{|-x|}$$

$$= 3 - \frac{1}{-x^2} - \frac{\ln x^2}{|x|}$$

$$= h(x)$$

و منه المطلوب .

* لـ كل x من IR^{*+} لدينا

$$\ln(x^2) = 2 \ln x$$

$$h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x}$$

$$= f(x)$$

ب- إنشاء (C') منحنى h

لدينا : $\forall x \in]0, +\infty[; h(x) = f(x)$
و منه (C') هو على المجال $]0, +\infty[$
و زوجية ، إذن (C') متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب .
إنشاء (C') انظر الشكل .