



# الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

## الدورة الاستدراكية 2013

### الموضوع

الصفحة  
1  
3



RS22

3	مدة الإختبار	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكها	الشعبة أو المسلك

### معلومات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- مدة إنجاز موضوع الامتحان : 3 ساعات ؛
- عدد الصفحات : 3 صفحات ( الصفحة الأولى تتضمن معلومات والصفحتان المتبقيتان تتضمنان تمارين الامتحان )؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- في حالة عدم تمكن المترشح من الإجابة عن سؤال ما ، يمكنه استعمال نتيجة هذا السؤال لمعالجة الأسئلة الموالية ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

### معلومات خاصة

يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها و تنوزع حسب المجالات كما يلي :

التمرين	المجال	النقطة الممنوحة
التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الثالث	المتتاليات العددية	3 نقط
التمرين الرابع	حساب الاحتمالات	3 نقط
التمرين الخامس	دراسة دالة وحساب التكامل	8 نقط

- بالنسبة للتمرين الخامس ،  $\ln$  يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري

## الموضوع

### التمرين الأول (3 ن)

- نعتبر ، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ، النقط  $A(0,0,1)$  و  $B(1,1,1)$  و  $C(2,1,2)$  و الفلكة  $(S)$  التي مركزها  $\Omega(1,-1,0)$  و شعاعها هو  $\sqrt{3}$
- 1) بين أن  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0$  هي معادلة ديكارتية للفلكة  $(S)$  وتحقق من أن  $A$  تنتمي إلى  $(S)$  0.75
- 2) أ- بين أن  $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$  و استنتج أن  $x - y - z + 1 = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$  0.75
- ب- احسب المسافة  $d(\Omega, (ABC))$  ثم استنتج أن المستوى  $(ABC)$  مماس للفلكة  $(S)$  في  $A$  0.75
- 3) ليكن  $(\Delta)$  المستقيم المار من  $\Omega$  والعمودي على  $(ABC)$
- $$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
- أ- بين أن تمثيل بارامتري للمستقيم  $(\Delta)$  0.25
- ب- استنتج مثلوثي إحداثيات نقطتي تقاطع المستقيم  $(\Delta)$  و الفلكة  $(S)$  0.5

### التمرين الثاني (3 ن)

- 1) حل في مجموعة الأعداد العقدية  $C$  المعادلة :  $z^2 - 8z + 25 = 0$  0.75
- 2) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  ، النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي أحاقها على التوالي هي :  $a = 4 + 3i$  و  $b = 4 - 3i$  و  $c = 10 + 3i$  والإزاحة  $T$  التي متجهتها  $\overline{BC}$
- أ- بين أن لحق النقطة  $D$  صورة النقطة  $A$  بالإزاحة  $T$  هو  $d = 10 + 9i$  0.75
- ب- تحقق من أن  $\frac{b-a}{d-a} = -\frac{1}{2}(1+i)$  ثم اكتب العدد العقدي  $-\frac{1}{2}(1+i)$  على الشكل المثلثي. 1
- ج- بين أن  $(\overline{AD}, \overline{AB}) \equiv \frac{5\pi}{4} [2\pi]$  0.5

### التمرين الثالث (3 ن)

- نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي :  $u_0 = 2$  و  $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$
- 1) تحقق من أن  $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  0.5
- 2) أ- بين بالترجع أن  $u_n > 1$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  0.5
- ب- بين أن المتتالية  $(u_n)$  تناقصية . 0.5
- ج- استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة . 0.25
- 3) لتكن  $(v_n)$  المتتالية العددية بحيث  $v_n = u_n - 1$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$
- أ- بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{5}$  ثم اكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  0.5
- ب- بين أن  $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ثم احسب نهاية المتتالية  $(u_n)$  0.75

يحتوي كيس على 9 بیدقات : أربع بیدقات بيضاء و ثلاث بیدقات سوداء و بیدقتان خضراوان .  
 ( لا يمكن التمييز بين البیدقات باللمس )  
 نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث بیدقات من الكيس .

1 (1) نعتبر الحدثين A : " الحصول على ثلاث بیدقات من نفس اللون " و B : " الحصول على ثلاث بیدقات مختلفة اللون مثني مثني " .

$$\text{بين أن } P(A) = \frac{5}{84} \text{ و } P(B) = \frac{2}{7}$$

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد البیدقات السوداء المسحوبة .  
 أ - تحقق من أن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2 و 3

$$\text{ب- بين أن } P(X=2) = \frac{3}{14} \text{ و } P(X=1) = \frac{15}{28}$$

ج - أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X

التمرين الخامس ( 8 ن )

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي :  $g(x) = x^2 - x - \ln x$

(1) أ- تحقق من أن  $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  .

ب- بين أن  $g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  واستنتج أن الدالة g تناقصية على  $]0, 1[$  و تزايدية على  $]1, +\infty[$

(2) بين أن  $g(x) \geq 0$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  ( لاحظ أن  $g(1) = 0$  ) .

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي :  $f(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ( الوحدة : 1 cm ) .

(1) أ- بين أن  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  و أول هندسيا هذه النتيجة .

ب- بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  ( لاحظ أن  $f(x) = x^2 \left( 1 - \frac{1}{x^2} - \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 \right)$  )

ج- استنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجيميا بجوار  $+\infty$  يتم تحديد اتجاهه .

(2) أ- بين أن  $f'(x) = 2 \left( \frac{x^2 - \ln x}{x} \right)$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  .

ب- تحقق من أن  $\frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \ln x}{x}$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  و استنتج أن الدالة f تزايدية على  $]0, +\infty[$

(3) أ- بين أن  $y = 2x - 2$  هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) المماس للمنحنى (C) في النقطة  $A(1, 0)$

ب- أنشئ في نفس المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  المستقيم (T) والمنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة هي A)

(4) أ- تحقق من أن  $H : x \mapsto x(\ln x - 1)$  دالة أصلية للدالة  $h : x \mapsto \ln x$  على  $]0, +\infty[$  ثم بين أن  $\int_1^e \ln x dx = 1$

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن :  $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$

ج- بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) ومحور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما  $x = 1$

$$\text{و } x = e \text{ هي } \frac{1}{3}(e^3 - 6e + 8) \text{ cm}^2$$

تصحيح التمرين الأول

(1)

✓ لدينا (S) هي الفلكة التي مركزها  $\Omega(1,-1,0)$  و شعاعها هو  $\sqrt{3}$

إن معادلة ديكارتية للفلكة (S) تكتب على شكل :  $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-0)^2 = (\sqrt{3})^2$

إن :  $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$

إن :  $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 = 3$

ومنه :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0$  هي معادلة ديكارتية للفلكة (S)

✓ لدينا :  $(0)^2 + (0)^2 + (1)^2 - 2(0) + 2(0) - 1 = 0 + 0 + 1 - 0 + 0 - 1 = 0$

إن : A تنتمي إلى (S)

(2) أ-

✓ لدينا :  $\overrightarrow{AB}(1,1,0)$  و  $\overrightarrow{AC}(2,1,1)$

إن :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (1)\vec{i} - (1)\vec{j} + (-1)\vec{k} \\ &= \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\end{aligned}$$

✓ لدينا :  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1,-1,-1)$  متجهة منظمية للمستوى (ABC)

إن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : للمستوى  $x + (-1).y + (-1).z + d = 0$  (1)

أي :  $x - y - z + d = 0$

و لدينا :  $A(0,0,1) \in (ABC)$  إذن :  $(0) - (0) - (1) + d = 0$  أي :  $d = 1$

و بالتالي :  $x - y - z + 1 = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

ب-

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|(1) - (-1) - (0) + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad \checkmark$$

✓ بما أن  $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{3} = R$  شعاع الفلكة (S) فإن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S)

و بما أن  $A \in (ABC) \cap (S)$  فإن نقطة التماس هي A

(3) أ- لدينا  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1,-1,-1)$  متجهة منظمية للمستوى (ABC) و  $(\Delta) \perp (ABC)$

إن :  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1,-1,-1)$  موجهة للمستقيم ( $\Delta$ )

و لدينا :  $\Omega(1,-1,0) \in (\Delta)$

$$\begin{cases} x = (1) + t(1) = 1+t \\ y = (-1) + t(-1) = -1-t \\ z = (0) + t(-1) = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) : (\Delta) \text{ و منه تمثيل بارامترى للمستقيم}$$

ب- لنحدد متلوئي إحداثيات نقطتي تقاطع  $(\Delta)$  و الفلكة  $(S)$

$$M(x,y,z) \in (\Delta) \cap (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = -t \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = (\sqrt{3})^2 \end{cases}$$

بعد التعويض نجد :  $t^2 = 1$

$$\begin{cases} x = 1+(-1) = 0 \\ y = -1-(-1) = 0 \\ z = -(-1) = 1 \\ t = -1 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x = 1+1 = 2 \\ y = -1-1 = -2 \\ z = -1 \\ t = 1 \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

### تصحيح التمرين الثاني

(1) لنحل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $z^2 - 8z + 25 = 0$

$$\Delta = (-8)^2 - 4(1)(25) = 64 - 100 = -36$$

بما أن  $\Delta < 0$  فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$$z_1 = \frac{-(-8) - i\sqrt{36}}{2(1)} = \frac{8-6i}{2} = 4-3i \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-(-8) + i\sqrt{36}}{2(1)} = \frac{8+6i}{2} = 4+3i$$

و منه :  $S = \{4-3i, 4+3i\}$

(2) أ- لدينا  $D(d)$  صورة  $A(a)$  بالإزاحة  $T$

$$d = a + z \frac{BC}{BC} \quad \text{إذن :}$$

$$d = a + c - b \quad \text{إذن :}$$

$$d = (4+3i) + (10+3i) - (4-3i) \quad \text{إذن :}$$

$$d = 10+9i \quad \text{ومنه :}$$

ب-

$$\frac{b-a}{d-a} = \frac{(4-3i)-(4+3i)}{(10+9i)-(4+3i)} = \frac{-6i}{6+6i} = \frac{-i}{1+i} = \frac{-i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{1}{2}(1+i) \quad \checkmark \text{ لدينا}$$

✓

$$\left| -\frac{1}{2}(1+i) \right| = \left| \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \bullet$$

• الشكل الممتي :

$$\frac{-1}{2}(1+i) = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right)$$

-ج

$$\begin{aligned} \left( \overline{AD}, \overline{AB} \right) &\equiv \arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right)[2\pi] \\ &\equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi] \end{aligned}$$

### تصحيح التمرين الثالث

(1) ليكن  $n \in \mathbb{N}$   
لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1 \\ &= \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5}(u_n - 1) \end{aligned}$$

إذن :  $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

(2) أ-

✓ من أجل  $n = 0$

لدينا  $u_0 = 2$

إذن :  $u_0 > 1$

✓ ليكن  $n \in \mathbb{N}$

• نفترض أن  $u_n > 1$

• و نبين أن :  $u_{n+1} > 1$  ؟

لدينا حسب نتيجة السؤال (1) :  $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$

و حسب الافتراض لدينا  $u_n > 1$  إذن  $u_n - 1 > 0$  إذن  $\frac{1}{5}(u_n - 1) > 0$

إذن  $u_{n+1} - 1 > 0$  و منه  $u_{n+1} > 1$

✓ نستنتج أن :  $u_n > 1$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

ب- ليكن  $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n = \left(\frac{1}{5} - 1\right)u_n + \frac{4}{5} = \frac{-4}{5}u_n + \frac{4}{5} = \frac{-4}{5}(u_n - 1)$$

لدينا :  $u_n - 1 > 0$

$$\frac{-4}{5}(u_n - 1) < 0 \quad \text{إذن}$$

و منه  $u_{n+1} - u_n < 0$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

و بالتالي : المتتالية  $(u_n)$  تناقصية

ج- بما أن  $(u_n)$  تناقصية و مصغرة ( بالعدد 1 ) فإن  $(u_n)$  متقاربة

(3) أ- ليكن  $n \in \mathbb{N}$

$$\checkmark \text{ لدينا باستعمال نتيجة السؤال (1) : } v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1) = \frac{1}{5}v_n$$

$$\text{إذن لكل } n \text{ من } \mathbb{N} : v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$$

$$\text{و منه المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{1}{5} \text{ و حدها الأول } v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$\checkmark$  لنكتب  $v_n$  بدلالة  $n$

$$\text{لدينا : } v_n = v_0 \times q^n$$

$$\text{إذن : } v_n = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$\text{و منه : } v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

ب-

$\checkmark$  ليكن  $n \in \mathbb{N}$

$$\text{لدينا } u_n - 1 = v_n$$

$$\text{إذن } u_n = v_n + 1$$

$$\text{و منه } u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1 \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

$$\checkmark \text{ بما أن } -1 < \frac{1}{5} < 1 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$$

$$\text{إذن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

تصحيح التمرين الرابع

التجربة " سحب في آن واحد ثلاث بيدقات من الكيس "

ليكن  $\Omega$  كون إمكانيات هذه التجربة

$$\text{card } \Omega = C_9^3 = 84 \text{ لدينا}$$

(1) A : " الحصول على ثلاث بيدقات من نفس اللون "

$$\boxed{B}, \boxed{B}, \boxed{B} \text{ أو } \boxed{N}, \boxed{N}, \boxed{N}$$

$$\text{card}A = C_4^3 + C_3^3 = 4 + 1 = 5$$

$$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card } \Omega} = \frac{5}{84}$$

B : " الحصول على ثلاث بيدقات مختلفة اللون مثلى مثلى "

$$\boxed{B}, \boxed{N}, \boxed{V}$$

$$\text{card}B = C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card } \Omega} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

(2) أ-

$$\boxed{\overline{N}}, \boxed{\overline{N}}, \boxed{\overline{N}} \rightarrow X = 0$$

$$\boxed{N}, \boxed{\overline{N}}, \boxed{\overline{N}} \rightarrow X = 1$$

$$\boxed{N}, \boxed{N}, \boxed{\overline{N}} \rightarrow X = 2$$

$$\boxed{N}, \boxed{N}, \boxed{N} \rightarrow X = 3$$

$$p(X = 2) = \frac{C_3^2 \times C_6^1}{84} = \frac{3 \times 6}{84} = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$$

ب-

$$p(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_6^2}{84} = \frac{3 \times 15}{84} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$$

ج- لنحدد قانون احتمال X :

$$p(X = 0) = \frac{C_6^3}{84} = \frac{20}{84} = \frac{5}{21}$$

$$p(X = 1) = \frac{15}{28}$$

$$p(X = 2) = \frac{3}{14}$$

$$p(X = 3) = \frac{C_3^3}{84} = \frac{1}{84}$$

$x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$



تصحيح التمرين الخامس

■I

(1) أ- ليكن  $x \in \mathbb{R}$  :

$$(2x+1)(x-1) = 2x^2 - 2x + x - 1 = 2x^2 - x - 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\mathbb{R} \text{ من } x \text{ لكل } 2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1) \text{ إذن :}$$

ب-

✓ ليكن  $x \in ]0, +\infty[$  :

$$g'(x) = (x^2 - x - \ln x)' = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x} \quad \text{لدينا :}$$

$$\text{إذن : } g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x} \text{ لكل } x \text{ من } ]0, +\infty[$$

$$\text{✓ لدينا : } 2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1) \text{ إذن } g'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{x}$$

$$\text{ولدينا } x > 0 \text{ إذن : } \frac{2x+1}{x} > 0 \text{ ومنه إشارة } g'(x) \text{ هي إشارة } x-1$$

$x$	0	$1+\infty$
$x-1$	-	+

• على المجال  $]0, 1[$  لدينا  $g'(x) \leq 0$  إذن  $g$  تناقصية

• على المجال  $[1, +\infty[$  لدينا  $g'(x) \geq 0$  إذن  $g$  تزايدية

(2) لدينا  $g$  تناقصية على  $]0, 1[$  و تزايدية على  $[1, +\infty[$

إذن  $g(1)$  هي القيمة الدنيا للدالة  $g$  على  $]0, +\infty[$

$$\text{إذن : } (\forall x \in ]0, +\infty[) \quad g(x) \geq g(1)$$

$$\text{إذن : } (\forall x \in ]0, +\infty[) \quad g(x) \geq 0$$

■II

$$(1) \text{ أ- } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 1 - (\ln x)^2 = -\infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -(\ln x)^2 = -\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

التأويل الهندسي :  $(C_f)$  يقبل مقاربا عموديا معادلته  $x = 0$

ب-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 - (\ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \left( \frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln(x))^2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 1 - \frac{1}{x^2} - \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 \right) = +\infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array} \right. \quad : \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 - \frac{1}{x^2} - \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 \right) = +\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array} \right. \quad : \text{ لأن}$$

ج- لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  إذن (C) يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأرتايب بجوار  $+\infty$

(2) أ-

ليكن  $x \in ]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 - 1 - (\ln x)^2)' \\ &= 2x - 0 - 2 \ln'(x) \cdot \ln(x) \\ &= 2x - \frac{2 \ln x}{x} \\ &= \frac{2x^2 - 2 \ln x}{x} \\ &= 2 \cdot \left( \frac{x^2 - \ln x}{x} \right) \end{aligned}$$

$$\text{إذن: } ]0, +\infty[ \text{ لكل } x \text{ من } f'(x) = 2 \left( \frac{x^2 - \ln x}{x} \right)$$

ب- ليكن  $x \in ]0, +\infty[$

$$\frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - x - \ln x}{x} + 1 = \frac{x^2 - x - \ln x + x}{x} = \frac{x^2 - \ln x}{x} \quad \checkmark$$

$$\text{إذن: } ]0, +\infty[ \text{ لكل } x \text{ من } \frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \ln x}{x}$$

✓ لدينا :  $f'(x) = 2\left(\frac{x^2 - \ln x}{x}\right)$

إذن :  $f'(x) = 2\left(\frac{g(x)}{x} + 1\right)$

و لدينا حسب الجزء الأول (2) :  $g(x) \geq 0$  و لدينا  $x > 0$

إذن :  $f'(x) = 2\left(\frac{g(x)}{x} + 1\right) > 0$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$

و منه الدالة  $f$  تزايدية قطعاً على  $]0, +\infty[$

(3) أ- معادلة ديكارتية للمستقيم  $(T)$  المماس للمنحنى  $(C)$  في النقطة  $A(1,0)$

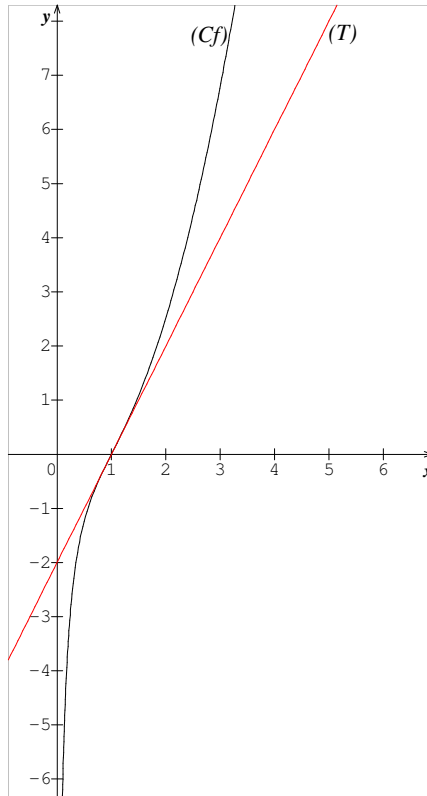
$$y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$$

لدينا  $f(1) = 0$  و  $f'(1) = 2\left(\frac{g(1)}{1} + 1\right) = 2$

إذن :  $y = 2 \cdot (x - 1) + 0$

و منه :  $y = 2x - 2$  هي معادلة ديكارتية للمستقيم  $(T)$  المماس للمنحنى  $(C)$  في النقطة  $A(1,0)$

-ب-



(4) أ-

✓ الدالة  $H : x \mapsto x(\ln x - 1)$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$

✓ ليكن  $x \in ]0, +\infty[$

$$H'(x) = (x(\ln x - 1))' = (x)' \cdot (\ln(x) - 1) + x \cdot (\ln(x) - 1)' = 1 \cdot (\ln(x) - 1) + x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x) - 1 + 1 = \ln(x)$$

إذن  $H'(x) = h(x)$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$

و بالتالي :  $H : x \mapsto x(\ln x - 1)$  دالة أصلية للدالة  $h : x \mapsto \ln x$  على  $]0, +\infty[$

$$\int_1^e \ln(x) dx = [x(\ln(x) - 1)]_1^e = (e \cdot (\ln(e) - 1)) - (1 \cdot (\ln(1) - 1)) = 1 \quad \bullet$$

ب-

$$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \quad \swarrow \quad \begin{cases} u'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \quad \swarrow \quad \begin{cases} u'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln x)^2 dx &= [x(\ln(x))^2]_1^e - \int_1^e 2 \cdot \frac{x \cdot \ln x}{x} \\ &= (e - 0) - 2 \int_1^e \ln x dx \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

ج- مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما  $x = e$  و  $x = 1$

$$A = \int_1^e |f(x)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

على المجال  $[1, e] : f(x) \geq 0$

$$A = \int_1^e f(x) dx \times 1cm \times 1cm$$

$$A = \int_1^e (x^2 - 1 - (\ln(x))^2) dx \cdot cm^2$$

$$A = \left( \int_1^e (x^2 - 1) dx - \int_1^e (\ln x)^2 dx \right) \cdot cm^2$$

$$A = \left( \left[ \frac{x^3}{3} - x \right]_1^e - \int_1^e (\ln x)^2 dx \right) \cdot cm^2$$

$$A = \left( \left( \frac{e^3}{3} - e \right) - \left( \frac{1}{3} - 1 \right) - (e - 2) \right) \cdot cm^2$$

و بالتالي : مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما  $x = e$  و  $x = 1$

$$\frac{1}{3}(e^3 - 6e + 8)cm^2 \text{ هي}$$

つづく