



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة العادية 2010  
الموضوع



الصفحة
1
4

9	المعامل:	NS24	الرياضيات	المادة:
4	مدة الإنجاز:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		الشعب(ة) أو المسلك:

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات.....(3)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(6.25)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(3,75)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

**التمرين الأول: (3.5 نقط)** الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما.

I- نزود المجموعة  $I = ]0, +\infty[$  بقانون التركيب الداخلي \* المعرف بما يلي:

$$(\forall (a, b) \in I \times I) \quad a * b = e^{\ln(a) \cdot \ln(b)}$$

1) بين أن القانون \* تبادلي و تجميعي في I . 0.5

2) بين أن القانون \* يقبل عنصرا محايدا  $\varepsilon$  في I يتم تحديده. 0.25

3) أ- بين أن  $(I \setminus \{1\}, *)$  زمرة تبادلية. (  $I \setminus \{1\}$  هي المجموعة I محرومة من 1 ) 0.75

ب- بين أن  $]1, +\infty[$  زمرة جزئية للزمرة  $(I \setminus \{1\}, *)$  . 0.25

4) نزود I بقانون التركيب الداخلي  $\times$  (  $\times$  هو الضرب في  $\square$  )

أ- بين أن القانون \* توزيعي بالنسبة للقانون  $\times$  0.25

ب- بين أن  $(I, \times, *)$  جسم تبادلي. 0.5

$$\text{II- نعتبر المصفوفة : } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) أحسب  $A^2$  و  $A^3$  . 0.5

2) استنتج أن المصفوفة A لا تقبل مقلوبا . 0.5

**التمرين الثاني: (3.5 نقط)**

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  .

1) أ- حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي  $3 + 4i$  : 0.25

ب- حل في المجموعة  $\square$  المعادلة :  $4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$  (E) 0.5

2) ليكن a و b حلي المعادلة (E) حيث:  $\text{Re}(a) < 0$  والنقطتين A و B صورتا a و b على التوالي.

$$\text{أ- تحقق أن: } \frac{b}{a} = 1 - i \quad 0.25$$

ب- استنتج أن المثلث AOB متساوي الساقين و قائم الزاوية في A . 0.75

3) لنكن C نقطة لحقها c وتخالف النقطة A ولنكن D صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه C

وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  ولنكن L صورة النقطة D بالإزاحة التي متجهتها  $\overrightarrow{AO}$  .

أ- حدد بدلالة c العدد العقدي d لحق النقطة D . 0.5

ب- حدد بدلالة c العدد العقدي  $\ell$  لحق النقطة L . 0.5

ج- حدد الكتابة الجبرية للعدد العقدي  $\frac{\ell - c}{a - c}$  ثم استنتج طبيعة المثلث ACL . 0.75

**التمرين الثالث: (3 نقط)**

- 1 (1) حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية  $m$  بحيث:  $[5] m^2 + 1 \equiv 0$
- (2) ليكن  $p$  عددا أوليا بحيث:  $p = 3 + 4k$  مع  $k$  عدد صحيح طبيعي.
- و ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا بحيث:  $[p] n^2 + 1 \equiv 0$
- أ- تحقق أن:  $[p] (n^2)^{1+2k} \equiv -1$  0.25
- ب- بين أن  $n$  و  $p$  أوليان فيما بينهما. 0.5
- ج- استنتج أن:  $[p] (n^2)^{1+2k} \equiv 1$  0.75
- د- استنتج مما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي  $n$  يحقق:  $[p] n^2 + 1 \equiv 0$  0.5

**التمرين الرابع: (6.25 نقط)**

- I- نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  بما يلي:  $f(x) = 4xe^{-x^2}$
- و ليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
- (1) أحسب نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$  0.5
- (2) أدرس تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[0; +\infty[$  ثم ضع جدول تغيراتها. 0.75
- (3) حدد معادلة نصف المماس للمنحنى  $(C)$  في أصل المعلم ثم أنشئ  $(C)$ . 0.75
- (نأخذ  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$  و نقبل أن النقطة التي أفصولها  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  نقطة انعطاف للمنحنى  $(C)$ )
- (4) أحسب التكامل  $a = \int_0^1 f(x) dx$  ثم استنتج بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى  $(C)$  ومحوري المعلم و المستقيم الذي معادلته  $x = 1$  0.5
- II- ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2.
- نعتبر الدالة العددية  $f_n$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  بما يلي:  $f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$
- (1) أ- بين أن:  $(\forall x > 1) e^{-x^2} < e^{-x}$  0.25
- ب- استنتج نهاية الدالة  $f_n$  عندما تؤول  $x$  إلى  $+\infty$ . 0.25
- (2) ادرس تغيرات الدالة  $f_n$  على المجال  $[0; +\infty[$  ثم ضع جدول تغيراتها. 0.75
- (3) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد  $u_n$  من المجال  $]0, 1[$  بحيث:  $f_n(u_n) = 1$  0.5
- (4) أ- تحقق أن:  $(\forall n \geq 2) f_{n+1}(u_n) = u_n$  0.25
- ب- بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 2}$  تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. 0.75

5) نضع :  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

أ- بين أن :  $0 < \ell \leq 1$  0.25

ب- بين أن :  $(\forall n \geq 2) \quad -\frac{\ln(4)}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln(4)}{n}$  0.25

ج- استنتج أن :  $\ell = 1$  0.5

**التمرين الخامس: (3.75 نقط)**

نعتبر الدالة العددية  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بما يلي :  $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

1) بين أن الدالة  $F$  فردية . 0.25

2) لكل  $x$  من المجال  $]0, +\infty[$  نضع :  $\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

أ- تحقق أن :  $(\forall x > 0) \quad F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$  0.25

ب- بين أن الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0, +\infty[$  ثم أحسب  $F'(x)$  من أجل  $x > 0$  0.5

ج- استنتج منحنى تغيرات الدالة  $F$  على المجال  $]0, +\infty[$  . 0.5

3) أ- باستعمال ميرهنة التزايدات المنتهية ، بين أن :  $F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$  :  $(\forall x > 0) (\exists c \in ]x, 2x[)$  0.5

ب- استنتج أن :  $(\forall x > 0) \quad \frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$  0.25

ج- حدد النهايات :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$  . 0.75

د- تحقق أن :  $F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\sqrt{e-1}}{2}$  و  $F(\sqrt{e-1}) < \sqrt{e-1}$  0.75

ثم استنتج أن المعادلة  $F(x) = x$  تقبل حلا وحيدا  $]0, +\infty[$