



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة الإستدراكية 2010  
الموضوع



الصفحة
1
4

9	المعامل:	RS24	الرياضيات	المادة:
4	مدة الإنجاز:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		الشعب(ة) أو المسلك:

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين و مسألة جميعها مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية.
- التمرين الثالث يتعلق بحساب الاحتمالات.
- المسألة تتعلق بالتحليل.

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة القابلة للبرمجة

**التمرين الأول: (3 نقط)**

نذكر أن  $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$  حلقة واحدة غير تبادلية.

$$E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} : \text{نعتبر المجموعة :}$$

- (1) 0.5 بين أن  $E$  جزء مستقر في  $(M_3(\mathbb{R}), \times)$
- (2) 0.5 أ- بين أن التطبيق  $\varphi$  الذي يربط العدد الحقيقي  $x$  بالمصفوفة  $M(x)$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{R}, +)$  نحو  $(E, \times)$ .  
 0.5 ب- استنتج أن  $(E, \times)$  زمرة تبادلية.  
 0.5 ج- حدد  $M^{-1}(x)$  مقلوب المصفوفة  $M(x)$  حيث  $x$  عدد حقيقي.  
 0.5 د- حل في المجموعة  $E$  المعادلة:  $A^5 X = B$  حيث:  $A = M(2)$  و  $B = M(12)$  و  $A^5 = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{5 \text{ مرات}}$
- (3) 0.5 بين أن المجموعة:  $F = \{M(\ln(x)) / x \in \mathbb{R}_+^*\}$  زمرة جزئية للزمرة  $(E, \times)$ .

**التمرين الثاني: (4 نقط)**

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

- (1) 0.5 نعتبر في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$   $(E)$   
 أ- تحقق ان العدد العقدي  $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$  حل للمعادلة  $(E)$  0.5  
 ب- استنتج  $b$  الحل الثاني للمعادلة  $(E)$  0.5
- (2) 0.5 أ- بين أن:  $a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$   
 0.75 ب- اكتب العدد  $a$  على الشكل المثلثي.
- (3) 0.5 نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي ألقاها على التوالي  $a$  و  $b$  و  $c = 2i + 2e^{i\frac{\pi}{7}}$   
 لتكن  $(\Gamma)$  الدائرة التي أحد أقطارها  $[AB]$   
 0.5 أ- حدد  $\omega$  لحق النقطة  $\Omega$  مركز الدائرة  $(\Gamma)$   
 0.5 ب- بين أن النقطتين  $O$  و  $C$  تنتميان للدائرة  $(\Gamma)$   
 0.75 ج- بين أن العدد العقدي  $\frac{c-a}{c-b}$  تخيلي صرف.

**التمرين الثالث: (3 نقط)**

يحتوي صندوق على 10 كرات بيضاء و كرتين حمراوين .  
 نسحب الكرات من الصندوق الواحدة تلو الأخرى بدون إحلال إلى أن نحصل لأول مرة على كرة بيضاء  
 ثم نوقف التجربة .  
 ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات المسحوبة.

- (1) 0.25 أ- حدد مجموعة قيم المتغير العشوائي  $X$

- ب- احسب احتمال الحدث  $[X=1]$  0.5
- ج- بين أن:  $p[X=2] = \frac{5}{33}$  0.5
- د- احسب احتمال الحدث  $[X=3]$  0.5
- (2) أ- بين أن:  $E(X) = \frac{13}{11}$  . (حيث  $E(X)$  هو الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$ ) 0.5
- ب- احسب  $E(X^2)$  ثم استنتج قيمة  $V(X)$ . (حيث  $V(X)$  هي مغايرة المتغير العشوائي  $X$ ) 0.75

**مسألة: (10 نقط)**

I- نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $I = [0,1]$  بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1 - \ln(1-x)} & ; 0 \leq x < 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

و ليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- (1) بين أن الدالة  $f$  متصلة على اليسار في 1 0.5
- (2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  على اليسار في 1 0.5
- (3) أدرس تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $I$  ثم أعط جدول تغيراتها. 0.75
- (4) أ- بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف وحيدة أفصولها  $\frac{e-1}{e}$  0.5
- ب- أنشئ المنحنى  $(C)$  مبرزا نصف مماسه في النقطة التي أفصولها 0. (نأخذ  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ ) 0.75
- (5) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من المجال  $I$  يحقق:  $f(\alpha) = \alpha$  0.5
- (6) أ- بين أن الدالة  $f$  تقابل من المجال  $I$  نحو  $I$ . 0.25
- ب- حدد  $f^{-1}(x)$  لكل عنصر  $x$  من المجال  $I$ . 0.5

II- نضع:  $I_0 = \int_0^1 f(t)dt$  و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم  $n$ :  $I_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$

- (1) بين أن المتتالية  $(I_n)_{n \geq 0}$  تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة. 0.75
- (2) بين أن:  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$  ( $\forall n \geq 0$ ) ثم حدد نهاية المتتالية  $(I_n)_{n \geq 0}$ . 0.75

III- لكل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $J = [0,1[$  و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم  $n$  نضع:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} F_k(x) \text{ و } F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt \text{ و } F_n(x) = \int_0^x t^n f(t) dt \text{ و } F_0(x) = \int_0^x f(t) dt$$

- (1) بين أن:  $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in J) F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{(1-t)} dt$  1

2) أ- بين أن الدالة :  $x \rightarrow (1-x)(1-\ln(1-x))$  تناقصية قطعاً على المجال  $J$  0.5

ب- استنتج أن الدالة :  $t \rightarrow \frac{f(t)}{1-t}$  تزايدية قطعاً على المجال  $[0, x]$  مهما يكن  $x$  من المجال  $J$  0.5

3) أ- بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in J) : 0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{n+2} \left( \frac{1}{1-x} \right)$  1

ب- استنتج أنه مهما يكن العدد  $x$  من المجال  $J$  لدينا : 0.5

4) أ- حدد من أجل 0.5

ب- حدد النهاية: 0.25