



مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أو بـ
المعامل 9
مدة الإنجاز : أربع ساعات

الامتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2009

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدية وحدتها

لتكن \mathcal{F} مجموعة المصفوفات (x, y) من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بحيث

أ) بين أن \mathcal{F} جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$. 0,25 ن

ب) بين أن (\mathcal{F}, \times) زمرة غير تبادلية. 0,50 ن

2) لتكن G مجموعة المصفوفات $M(x, 0)$ من \mathcal{F} حيث $x \in \mathbb{R}^*$ بحيث .
بين أن G زمرة جزئية للزمرة (\mathcal{F}, \times) . 1,00 ن

3) ليكن $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. 0,50 ن

نزود المجموعة E بقانون التركيب الداخلي \perp المعرف بما يلي :

$$(\forall (x, y) \in E); (\forall (a, b) \in E) : (x, y) \perp (a, b) = \left(ax, bx + \frac{y}{a} \right)$$

$\varphi : (\mathcal{F}, \times) \rightarrow (E, \perp)$ نعتبر التطبيق :

$$M(x, y) \rightarrow \varphi(M(x, y)) = (x, y)$$

أ) أحسب : $(2, 3) \perp (1, 1)$ و $(1, 1) \perp (2, 3)$. 0,25 ن

ب) بين أن φ تشكل تقابلية . 0,50 ن

ج) استنتج بنية (E, \perp) . 0,50 ن

التمرين الثاني : (4,0 ن)

m عدد عقدي يخالف 1 .

(I) نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z .

1) تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : 0,25 ن

ب) حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة (E) . 0,25 ن

ن 0,50

ج) حدد على الشكل الجيري قيمتي العدد العقدي m لكي يكون جداء حل المعادلة (E) يساوي 1

ن 1,00

2) نضع $z_2 = m - i$ و $z_1 = 1 - im$.

(II) في حالة $m = e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ، أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

. المستوى العقدي (\mathcal{P}) منسوب إلى معلم متعمد منظم مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

. نعتبر النقط M و M_1 و M_2 التي ألاحقها على التوالي هي : $z_2 = m - i$ و $z_1 = 1 - im$ و m .

ن 0,50

1) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط M و M_1 و M_2 نقط مستقيمية.

ن 0,50

2) أ) بين أن التحويل \mathcal{R} الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' التي لحقها iz هو دوران ينبغي تحديد لحق مركزه Ω و قياساً لزاوته.

ب) بين أن العدد العقدي : $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان :

ن 0,50

() $\Re(m)$ هو الجزء الحقيقي للعدد m و $\Im(m)$ هو جزءه التخيلي

ن 0,50

3) استنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة.

. $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ لكل n من \mathbb{N}^* نضع :

التمرين الثالث : (3,0 ن)

ن 0,25

1) تحقق أن a_n عدد زوجي لكل n من \mathbb{N}^* .

ن 0,50

ب) حدد قيم n التي يكون من أجلها $a_n \equiv 0 [3]$.

ن 0,50

2) ليكن p عدداً أولياً بحيث $p > 3$.

ن 0,75

أ) بين أن : $6^{p-1} \equiv 1 [p]$ و $3^{p-1} \equiv 1 [p]$ و $2^{p-1} \equiv 1 [p]$.

ن 0,75

ب) بين أن p يقسم a_{p-2} .

ن 0,75

3) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي q يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n بحيث $a_n \wedge q = q$.

ن 0,50

() $a_n \wedge q$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و q .

التمرين الرابع : (10 ن)

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0, +\infty]$ بما يلي.

$(\forall x > 0) ; f_n(x) = x(1 - \ln x)^n$ و $f_n(0) = 0$

1) ليكن (C_n) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعمد منظم $(O, \vec{e}_i, \vec{e}_j)$.

ن 0,50

أ) بين أن الدالة f_n متصلة على اليمين في 0 (يمكن وضع $x = t^n$).

ن 0,25

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0.

ن 0,25

ج) حدد النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$.

ن 1,00

② أدرس تغيرات الدالة f_1 . 0,50

بـ أدرس تغيرات الدالة f_2 . 0,50

③ أدرس الوضع النسبي للمنحنين (\mathcal{C}_1) و (\mathcal{C}_2) . 0,25

بـ أنشئ المنحنين (\mathcal{C}_1) و (\mathcal{C}_2) (نقبل $A(1,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (\mathcal{C}_2)) (نأخذ: $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = 2cm$). 0,50

(II) نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[0, -\infty]$ بما يلي :

أ) بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على المجال $[-\infty, 0]$. وأن: 0,50

بـ استنتج منحنى تغيرات الدالة F على المجال: $[-\infty, 0]$. 0,25

أ) بين أن: 0,25

بـ تحقق أن الدالة: $x \rightarrow x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right)$ هي دالة أصلية للدالة f_1 على المجال $[0, +\infty]$. 0,25

ج) بين أن: 0,25

3) نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ عندما يؤول x إلى $-\infty$. 0,25

بـ بين أن: $\frac{3}{8} \leq \ell \leq \frac{3}{4}$. 0,25

(III) لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع:

أ) بين أن: $u_n \geq 0$ (forall $n \geq 1$). 0,50

بـ حدد إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[1, e]$. 0,50

ج) بين أن: $u_{n+1} \leq u_n$ (forall $n \geq 1$). 0,25

دـ استنتاج أن المتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة. 0,25

أ) بين أن: $u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n$ (forall $n \geq 1$). 0,50

بـ استنتاج بـ cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين (\mathcal{C}_1) و (\mathcal{C}_2) و المستقيمين $x=1$ و $x=e$. 0,50

أ) بين أن: $(\forall n \geq 2) ; \frac{1}{(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{(n-1)}$. 0,75

بـ حدد: $\lim_{x \rightarrow +\infty} n u_n$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$. 0,50

4) عدد حقيقي مخالف للعدد u_1 . 0,25

نعتبر المتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي:

و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع:

أ) بين أن: $(\forall n \geq 1) ; d_n = \frac{n!}{2^{(n-1)}} d_1$. 0,25

بـ بين أن: $(\forall n \geq 2) ; \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$. 0,25

ج) بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty$. 0,25

دـ استنتاج أن المتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ متبااعدة. 0,25

التمرين الأول : (4,5 ن)

١)

لتكن $M(x, y)$ و $M(a, b)$ مصفوفتين من F

$$\begin{aligned} M(x, y) \times M(a, b) &= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \quad \text{لدينا :} \\ &= \begin{pmatrix} xa & xb + \frac{y}{a} \\ 0 & \frac{1}{xa} \end{pmatrix} \\ &= M\left(xa ; xb + \frac{y}{a}\right) \end{aligned}$$

إذن F جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

٢)

لديننا F جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$
إذن \times قانون تركيب داخلي في

لتكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ و $M(e, f)$ عناصر من F

لدينا :

$$\begin{aligned} (M(a, b) \times M(c, d)) \times M(e, f) &= M\left(ac, ad + \frac{b}{c}\right) \times M(e, f) \\ &= M\left(eac, acf + \frac{ad}{e} + \frac{b}{ce}\right) \end{aligned}$$

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned} M(a, b) \times (M(c, d) \times M(e, f)) &= M(a, b) \times M\left(cf, cf + \frac{d}{e}\right) \\ &= M\left(eac, acf + \frac{ad}{e} + \frac{b}{ce}\right) \end{aligned}$$

و وبالتالي :

$$(M(a, b) \times M(c, d)) \times M(e, f) = M(a, b) \times (M(c, d) \times M(e, f))$$

يعني \times قانون تجميعي في F .

ليكن $M(e_1; e_2)$ العنصر المحايد للضرب في F

$$\Leftrightarrow \forall M(a, b) \in F ; M(a, b) \times M(e_1; e_2) = M(e_1; e_2) \times M(a, b) = M(a, b)$$

$$\Leftrightarrow M\left(ae_1 ; ae_2 + \frac{b}{e_1}\right) = M(a, b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ae_1 = a \\ ae_2 + \frac{b}{e_1} = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 1 \in \mathbb{R}^* \\ e_2 = 0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

إذن $M(1, 0) = I$ هو العنصر المحايد لضرب المصفوفات في F

لتكن المصفوفة $M(x', y')$ مماثلة المصفوفة $M(x, y)$ بالنسبة لـ \times في F

$$\Leftrightarrow M(x, y) \times M(x', y') = M(x', y') \times M(x, y) = I$$

$$\Leftrightarrow M\left(xx', xy' + \frac{y}{x'}\right) = M(1, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^* \\ y' = -y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

إذن كل مصفوفة $M(x, y)$ تمتلك مصفوفة مماثلة $M\left(\frac{1}{x}; -y\right)$ بالنسبة

للضرب في F

لدينا \times ليس تبادليا لأن :

$$\begin{cases} M(x, y) \times M(y, x) = M(xy, x^2 + 1) \\ M(y, x) \times M(x, y) = M(xy, y^2 + 1) \end{cases}$$

نلاحظ إذن أن : $(\forall x \neq y) ; x^2 + 1 \neq y^2 + 1$

خلاصة : (F, \times) زمرة غير تبادلية.

٢)

لدينا G جزء غير فارغ من F لأنها تضم العنصر $M(1, 0)$ على الأقل

لتكن $M(b, 0)$ و $M(a, 0)$ مصفوفتين من G

$$\begin{aligned} M(b, 0) \times (M(a, 0))' &= M(b, 0) \times M\left(\frac{1}{a}, 0\right) \quad \text{لدينا :} \\ &= M\left(\frac{b}{a} ; 0\right) \end{aligned}$$

لدينا $M\left(\frac{b}{a}, 0\right) \in G$ و منه $\frac{b}{a} \neq 0$ إذن $a \neq 0$

وبالتالي : (G, \times) زمرة جزئية للزمرة (F, \times)

٣)

$$(1, 1) \perp (2, 3) = \left(2 ; 3 + \frac{1}{2}\right) = \left(2 ; \frac{7}{2}\right)$$

$$(2, 3) \perp (1, 1) = \left(2 ; 2 + \frac{3}{1}\right) = (2, 5)$$

٤)

لتكن $M(c, d)$ و $M(a, b)$ مصفوفتين من F

$$\begin{aligned} \varphi(M(c, d) \times M(a, b)) &= \varphi\left(M\left(ac ; bc + \frac{d}{a}\right)\right) \quad \text{لدينا :} \\ &= \left(ac ; bc + \frac{d}{a}\right) \\ &= (c, d) \perp (a, b) \\ &= \varphi(M(c, d)) \perp \varphi(M(a, b)) \end{aligned}$$

إذن φ تشكل من (F, \times) نحو (E, \perp)

ليكن (a, b) عنصرا من E .

نريد حل المعادلة ذات المجهول $M(x, y)$ التالية :

$$\Leftrightarrow (x, y) = (a, b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \sqrt[4]{2} \left(\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}+4}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}} \right) \\ m_2 = \sqrt[4]{2} \left(-\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}+4}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}} \right) \end{cases}$$

(2)(I) ■

في هذا السؤال يجب ضبط جميع قواعد الصيغ المثلثية.

$$\begin{aligned} z_1 &= re^{i\varphi} \quad \text{نضع :} \\ z_1 &= 1 - im \quad \text{لدينا :} \\ &= 1 - ie^{i\theta} \\ &= 1 - i(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (1 + \sin \theta) - i \cos \theta \end{aligned}$$

إذن هدفنا هو ايجاد المجهولين r و φ بدلالة θ بحيث :

$$(1 + \sin \theta) - i \cos \theta = r \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r \cos \varphi = 1 + \sin \theta \\ r \sin \varphi = -\cos \theta \end{cases}$$

$$(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = r^2 \quad \text{لدينا :}$$

$$(1 + \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta = r^2 \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned} r^2 &= 2(1 + \sin \theta) = 2 \left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin \theta \right) \quad \text{و منه :} \\ &= 2 \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right) \\ &= 4 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \\ &= 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

$$r = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{إذن :}$$

نعرض r بقيمتها في المعادلة الثانية من النظمة نحصل على :

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{-\cos \theta}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} \\ &= \frac{\cos(\pi - \theta)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} \\ &= \frac{\sin \left(\frac{-\pi}{2} + \theta \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} \\ &= \frac{-\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

إذن المعادلة تقبل حلًا وحيداً وهو

$\forall (a, b) \in E, \exists! M(x, y) \in F ; \varphi(M(x, y)) = (a, b)$: و منه :

و بالتالي : φ تقابل من (E, \perp) نحو (F, \times)

خلاصة : φ تشكل تقابل من (F, \times) نحو (E, \perp)

نعلم أن التشكل التقابل يحافظ على بنية الزمرة.

يمان : (F, \times) زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد هو المصفوفة $M(1,0)$

و كل مصفوفة $M(x, y)$ تقبل مماثلة $M\left(\frac{1}{x}, -y\right)$ بالنسبة لـ \times في F .

فإن : (E, \perp) زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد هو الزوج $(1,0)$

و كل زوج (x, y) يقبل مماثلاً $\varphi\left(M\left(\frac{1}{x}, -y\right)\right)$

$$\begin{cases} \varphi(M(1,0)) = (1,0) \\ \varphi\left(M\left(\frac{1}{x}, -y\right)\right) = \left(\frac{1}{x}, -y\right) \end{cases} \quad \text{ولدينا :}$$

التمرين الثاني : (4,0 ن)

$$\Delta = (1 - i)^2(m + 1)^2 + 4i(m^2 + 1)$$

$$\begin{aligned} &= -2i(m^2 + 2m + 1) + 4im^2 + 4i \\ &= 2im^2 - 4im + 2i \\ &= 2i(m^2 - 2m + 1) \\ &= (1 + i)^2(m - 1)^2 \end{aligned}$$

$$z_1 = (1 - im) \quad \text{و} \quad z_2 = (m - i)$$

نضع : $m = re^{i\theta}$ و ننطلق من :

$$\Leftrightarrow (1 - im)(m - i) = 1$$

$$\Leftrightarrow m - i - m^2i - m = 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 = -1 + i$$

$$\Leftrightarrow r^2 e^{2i\theta} = \sqrt{2} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$\Leftrightarrow r^2 e^{2i\theta} = \sqrt{2} e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{8} + k\pi \quad ; \quad k \in \{0,1\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{8} \quad \text{أو} \quad \theta = \frac{11\pi}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{3i\pi}{8}} \\ m_2 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{11i\pi}{8}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{-\cos(\pi - \theta)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} \\
 &\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{-\sin\left(\frac{-\pi}{2} + \theta\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} \\
 &\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{-2\sin\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} \\
 &\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} \\
 &\Leftrightarrow \cos \varphi = \cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \\
 &\quad \boxed{\varphi \equiv \left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) [k\pi]} \quad \text{إذن :}
 \end{aligned}$$

$$z_2 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{و بالتالي :}$$

————— ①(II) ■

$$\begin{aligned}
 M \in (M_1 M_2) &\Leftrightarrow M \in (M_1 M_2) \\
 &\Leftrightarrow \frac{z_1 - m}{z_2 - m} \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1 - im - m}{m - i - m} \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow i + m - im \in \mathbb{R} \\
 &\quad m = x + iy \quad \text{نضع :}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow (x + y) + i(y - x + 1) \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow y - x + 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \boxed{y = x - 1}
 \end{aligned}$$

. $y = x - 1$ إذن مجموعة النقط M تشكل مستقيمة معادلته

————— ②(II) ■

$$z' = 1 - iz \quad \text{تنطلق من}$$

نريد كتابة هذه المتساوية على شكل :

$$\text{حيث } \omega \text{ عدد عقدي .} \quad z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

$$\begin{cases} e^{i\theta} = -i \\ -\omega e^{i\theta} + \omega = 1 \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \\
 &= \frac{-2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \\
 &= -\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi \equiv \left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) [k\pi]} \quad \text{إذن :}$$

$$\boxed{z_1 = \left(2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right) e^{i\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}} \quad \text{و بالتالي :}$$

$z_2 = re^{i\varphi}$: نفس الطريقة نضع :

$$z_2 = m - i = e^{i\theta} - i = \cos \theta + i(\sin \theta - 1)$$

هدفنا هو البحث عن r و φ بدلالة θ بحيث :

$$r \cos \varphi + i r \sin \varphi = \cos \theta + i(\sin \theta - 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = r \cos \varphi \\ \sin \theta - 1 = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = r^2 \quad \text{لدينا :}$$

$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta - 1)^2 = r^2 \quad \text{إذن :}$$

$$r^2 = 2(1 - \sin \theta) \quad \text{و منه :}$$

$$r^2 = 2(1 + \sin(-\theta)) \quad \text{أي :}$$

نعلم حسب الجزء الأول من هذا السؤال أن :

$$2(1 + \sin \theta) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$2(1 + \sin(-\theta)) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{إذن :}$$

$$r^2 = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{يعني :}$$

$$\boxed{r = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{و منه :}$$

ملاحظة : لقد تم اختيار القيمة الموجبة لـ r لأن معيار عدد عقدي يكون دائماً عدداً موجباً.

نفرض r بقيمتها في المعادلة الأولى من النظمة نحصل على :

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{\cos \theta}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$(4) \quad 3^n(1+2^n) \equiv 1[2] \quad \text{من (3) و (2) نحصل على:}$$

$$(2^n - 1) + 3^n(1+2^n) \equiv 2[2] \quad \text{و من (1) و (4) نحصل على:}$$

$$2 \equiv 0[2] \quad \text{لأن:} \quad (2^n - 1) + 3^n(1+2^n) \equiv 0[2] \quad \text{يعني:}$$

$$a_n \equiv 0[2] \quad \text{و منه:}$$

وبالتالي: a_n عدد زوجي كيما كان العدد الصحيح الطبيعي n .

• (1) ■

$$a_n = 2^n + 3^n + 3^n 2^n - 1 \quad \text{لدينا:}$$

$$a_n = 2^n(3^n + 1) + (3^n - 1) \quad \text{يعني:}$$

$$3^n \equiv 0[3] \quad \text{نعلم أن:} \quad 3 \equiv 0[3] \quad \text{إذن:}$$

$$(6) \quad (3^n + 1) \equiv 1[3] \quad \text{و منه:} \quad (5) \quad (3^n - 1) \equiv -1[3]$$

$$2^n(3^n + 1) + (3^n - 1) \equiv 2^n - 1[3] \quad \text{من (5) و (6) نحصل على:}$$

$$(7) \quad a_n \equiv (2^n - 1)[3] \quad \text{يعني:}$$

$$2^n \equiv (-1)^n[3] \quad \text{لدينا في الأخير:} \quad 2 \equiv -1[3] \quad \text{إذن:}$$

$$(8) \quad (2^n - 1) \equiv ((-1)^n - 1)[3] \quad \text{أي:}$$

$$a_n \equiv (-1)^n - 1[3] \quad \text{من المتواقتين (7) و (8) نستنتج أن:}$$

$$(-1)^{2k} - 1 = 0 \quad \text{من أجل } n \text{ عدد زوجي نحصل على:}$$

$$a_n \equiv 0[3] \quad \text{أي:}$$

$$(-1)^{2k+1} - 1 = -2 \quad \text{من أجل: } n \text{ عدد فردي نحصل على:}$$

$$a_n \equiv -2[3] \quad \text{و منه:}$$

• (2) ■

بتطبيق مبرهنة (Fermat) مرتين نحصل على:

$$\left\{ \begin{array}{l} p \text{ أولي} \\ p \wedge 2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow 2^{p-1} \equiv 1[p] \quad (1)$$

و

$$\left\{ \begin{array}{l} p \text{ أولي} \\ p \wedge 3 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow 3^{p-1} \equiv 1[p] \quad (2)$$

نضرب المتواقتين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على:

$$3^{p-1} \cdot 2^{p-1} \equiv 1[p]$$

$$6^{p-1} \equiv 1[p] \quad \text{يعني:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \frac{-\pi}{2} \\ \omega = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \end{array} \right. \quad \text{إذن:}$$

$$z' = e^{\frac{-\pi i}{2}} \left(z - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) \quad \text{و منه:}$$

إذن التحويل R عبارة عن دوران مركزه النقطة $\Omega = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)$ و زاويته $\frac{-\pi}{2}$

• (2) ■

$$m = x + iy \quad \text{و} \quad \operatorname{Re}(m) = x \quad \text{و} \quad \operatorname{Im}(m) = y \quad \text{وضع:}$$

$$\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \right)} = -\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \right) \quad \text{تخيلي صرف.}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{m} + i - 1 - i\bar{m}}{i} = \frac{m - i - 1 + im}{i}$$

$$\Leftrightarrow (x - iy) + i - 1 - i(x - iy) = (x + iy) - i - 1 + i(x + iy)$$

$$\Leftrightarrow -2ix + 2i - 2iy = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y = 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(m) + \operatorname{Im}(m) + 1$$

• (2) ■

ننطلق من كون النقط Ω و M_2 و M_1 متداورة

$$\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \right) \equiv \arg \left(\frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega} \right) [\pi]$$

$$\left(\frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega} \right) = \frac{-i \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - m \right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - m \right)} = -i \quad \text{لدينا:}$$

$$\frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega} \quad \text{عدد تخيلي صرف.}$$

$$\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \quad \text{عدد تخيلي صرف كذلك.}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(m) + \operatorname{Im}(m) = 1$$

$$\Leftrightarrow y = -x + 1$$

إذن مجموعة النقط M التي من أجلها Ω و M_2 و M_1 متداورة

شكل المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = -x + 1$

التمرين الثالث: (3,3)

• (1) ■

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad \text{لدينا:}$$

$$= (2^n - 1) + 3^n(1 + 2^n)$$

$$\text{لدينا: } 3 \equiv 1[2] \quad \text{و} \quad 2 \equiv 0[2]$$

$$\text{إذن: } 3^n \equiv 1[2] \quad \text{و} \quad 2^n \equiv 0[2]$$

$$(3) \quad 3^n \equiv 1[2] \quad \begin{cases} (1) & 2^n - 1 \equiv 1[2] \\ (2) & 2^n + 1 \equiv 1[2] \end{cases} \quad \text{و منه:}$$

المذكرة الأولى التمرين الرابع : (3,3)

ج ① ■

$$\ln x = n \ln t \quad x = t^n \quad \text{إذن :}$$

$$t = e^{\left(\frac{\ln x}{n}\right)} \quad \text{و منه :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln x)^n \quad \text{لدينا :} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t^n (1 - n \ln t)^n \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(t - nt \ln t \right)^n = 0 = f_n(0) \end{aligned}$$

إذن f_n دالة متصلة على يمين الصفر.

ج ① ■

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln x)^n = +\infty \notin \mathbb{R}$$

إذن f_n غير قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر.

ج ② ■

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f_2(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f_1(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty$$

ج ② ■

$$f_1(x) = x(1 - \ln x) \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= (x - x \ln x)' \quad \text{إذن :} \\ &= 1 - (\ln x + 1) \\ &= -\ln x \end{aligned}$$

و منه : f_1' تتعدّم في العدد 1

$$\text{إذا كان : } f_1'(x) < 0 \quad x > 1 \quad \text{فإن :}$$

$$\text{إذا كان : } f_1'(x) > 0 \quad x < 1 \quad \text{فإن :}$$

ج ② ■

$$(1) [3 \cdot 2^{p-1} \equiv 3[p]] \quad 2^{p-1} \equiv 1[p] \quad \text{لدينا :}$$

$$(2) [2 \cdot 3^{p-1} \equiv 2[p]] \quad 3^{p-1} \equiv 1[p] \quad \text{و لدينا :}$$

$$(3) [6 \cdot 6^{p-2} \equiv 1[p]] \quad 6^{p-1} \equiv 1[p] \quad \text{و لدينا :}$$

$$(4) [-6 \equiv -6[p]] \quad \text{و لدينا :}$$

نجم المتوافقات (1) و (2) و (3) و (4) طرفا بطرف نحصل على :

$$3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6 \cdot 6^{p-2} - 6 \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot 2^{p-2} + 6 \cdot 3^{p-2} + 6 \cdot 6^{p-2} - 6 \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow 6(2^{p-1} + 3^{p-1} + 6^{p-2} - 1) \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow 6(a_{p-2}) \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow p / 6(a_{p-2}) \quad (5)$$

نفك العدد 6 إلى جداء عوامل أولية نجد :

$$(6) [6 \wedge p = 1] \quad \text{و لدينا } p \text{ عدد أولي أكبر من 3 إذن :}$$

من (5) و (6) نستنتج حسب (Gauss)

ج ② ■

ليكن q عدداً أولياً .

نحصل في هذا السؤال بين ثلاثة حالات للعدد q :

الحالة الأولى : إذا كان $q = 2$

فإنه حسب نتيجة السؤال ① أ () $\forall n \in \mathbb{N}^* : 2 / a_n$: ()

$$(\exists n \in \mathbb{N}^*) : a_n \wedge q = q \quad \text{إذن :}$$

الحالة الثانية : إذا كان $q = 3$

فإنه حسب نتيجة السؤال ① ب () $\forall n \in \mathbb{N}^* : 3 / a_n$: ()

$$(\exists n \in \mathbb{N}^*) : a_n \wedge q = q \quad \text{إذن :}$$

الحالة الثالثة : إذا كان $q > 3$

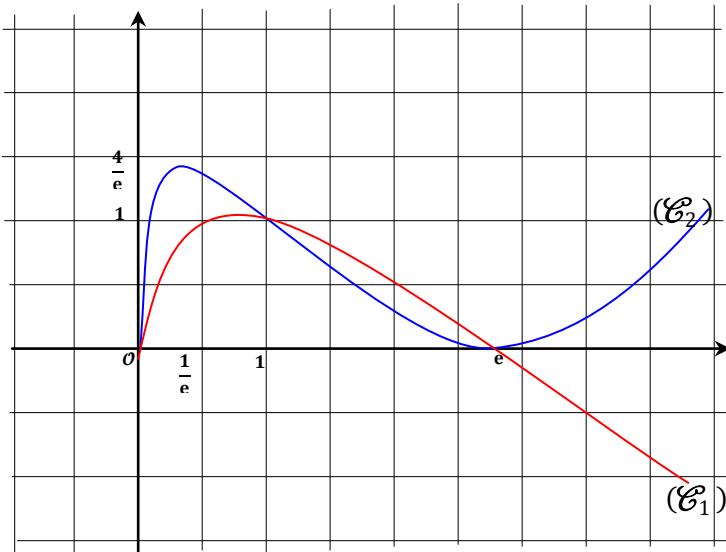
رأينا في السؤال ② ب أن () $\forall q > 3 ; q / a_{q-2}$:

$$(\exists n \in \mathbb{N}^*) : a_n \wedge q = q \quad \text{إذن :}$$

خلاصة : نستخرج من هذه الحالات الثلاث أن :

$$(\forall q \in \mathbb{P}), (\exists n \in \mathbb{N}^*) : a_n \wedge q = q$$

• ③ ■



الجزء الثاني

① ① ■

$$F(x) = \psi(1) - \psi(e^x) \quad \text{و} \quad \psi'(x) = \frac{f_1(x)}{(1+x^2)}$$

لدينا الدالة $x \rightarrow \frac{f_1(x)}{1+x^2}$ متصلة على $[0, +\infty]$

إذن فهي تقبل دالة أصلية ψ بحيث :

$$F(x) = \psi(1) - \psi(e^x) \quad \text{و} \quad \psi'(x) = \frac{f_1(x)}{(1+x^2)}$$

. إذن : F قابلة للإشتقاق على $[-\infty; 0]$

$$\begin{aligned} F'(x) &= (\psi(1))' - (\psi(e^x))' \\ &= 0 - e^x \psi'(e^x) \\ &= \frac{-e^x f_1(e^x)}{1+e^{2x}} \\ &= \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}} \end{aligned}$$

ولدينا :

• ① ■

$$(\forall x < 0) ; \quad F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}} \quad \text{لدينا :}$$

$$(\forall x < 0) ; \quad \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} > 0 \quad \text{و بما أن :}$$

فإن إشارة $F'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(x-1)$

$x < 1 \iff x < 0$: ولدينا

$x-1 < 0$: و منه

وبالتالي : $F'(x) < 0$ يعني : F دالة تناظرية على المجال $[-\infty; 0]$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f_1 كما يلي :

x	0	1	e	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	0	-	-
f_1	0	1	0	$-\infty$

• ② ■

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= (x(1-\ln x)^2)' \\ &= (1-\ln x)^2 - \frac{2x}{x}(1-\ln x) \\ &= (1-\ln x)^2 - 2(1-\ln x) \\ &= (1-\ln x)(1-\ln x-2) \\ &= (1-\ln x)(-1-\ln x) \end{aligned}$$

نلاحظ أن : f_2' تتعدم في e و $\frac{1}{e}$.

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
$1-\ln x$	+	+	0	-
$-1-\ln x$	+	0	-	-
$f_2'(x)$	+	0	-	0
f_2	0	$\frac{4}{e}$	0	$+\infty$

① ③ ■

لدينا :

$$\begin{aligned} f_1(x) - f_2(x) &= x(1-\ln x) - x(1-\ln x)^2 \\ &= x(1-\ln x)(\ln x) \end{aligned}$$

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+	+
$(1-\ln x)$	+	+	0	-
$x(1-\ln x)\ln x$	-	0	+	-

إذن (\mathcal{E}_1) يوجد فوق (\mathcal{E}_2) على المجال $[1; e]$.

و (\mathcal{E}_1) يوجد أسفل (\mathcal{E}_2) على المجالين $[+\infty; e]$ و $[0; 1]$.

الجزء الثالث

Ⓐ① ■

$n \geq 1$ و $1 \leq x \leq e$ ليكن

$(1 - \ln x) \geq 0$ إذن : $0 \leq \ln x \leq 1$ و منه :

$$\int_1^e f_n(x) dx \geq 0 \quad \text{أي} \quad \text{و بالتالي} \quad x(1 - \ln x)^n \geq 0$$

$u_n \geq 0$ أي

Ⓐ① ■

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= x(1 - \ln x)^{n+1} - x(1 - \ln x)^n \\ &= x(1 - \ln x)^n(-\ln x) \end{aligned}$$

وبما أن : $-\ln x \leq 0$ و $(1 - \ln x) \geq 0$ فإن : $1 \leq x \leq e$

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \quad \text{أي} \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0 \quad \text{و منه} :$$

Ⓐ① ■

$\forall x \in [1, e] ; f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ بما أن :

$$\int_1^e f_{n+1}(x) dx \leq \int_1^e f_n(x) dx \quad \text{فإن} :$$

$u_{n+1} \leq u_n$ و منه

Ⓐ① ■

لدينا : $u_{n+1} \leq u_n$ إذن : $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية تناسبية.

ولدينا : $(u_n)_{n \geq 1}$ إذن : $(\forall n \geq 1) ; u_n \geq 0$ مصغرورة بـ 0

و بالتالي : $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية متقاربة.

Ⓐ② ■

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \int_1^e f_{n+1}(x) dx = \int_1^e \underbrace{x}_{u'} \underbrace{(1 - \ln x)^{n+1}}_v dx \quad \text{لدينا} \\ &= \left[\frac{x^2}{2} (1 - \ln x)^{n+1} \right]_1^e - \frac{(n+1)}{2} \int_1^e x^2 \left(\frac{-1}{x} \right) (1 - \ln x)^n dx \\ &= \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} \int_1^e x(1 - \ln x)^n dx \\ &= \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n \end{aligned}$$

$$(\forall n \geq 1) ; u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n \quad \text{و بالتالي} :$$

Ⓑ② ■

$x < 0$: $t \in [e^x; 1]$ بحيث

$e^x < t < 1$ يعني

$1 + e^{2x} < 1 + t^2 < 2$ و منه :

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1+t^2} < \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} f_1(t) < \frac{f_1(t)}{1+t^2} < \frac{f_1(t)}{1+e^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt < \int_{e^x}^1 \left(\frac{f_1(t)}{1+t^2} \right) dt < \int_{e^x}^1 \left(\frac{f_1(t)}{1+e^{2x}} \right) dt$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt < F(x) < \frac{1}{(1+e^{2x})} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \left(x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right) \right)' &= 2x \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right) + x^2 \left(\frac{-1}{2x} \right) \quad \text{لدينا} \\ &= \frac{3x}{2} - x \ln x - \frac{x}{2} \\ &= x(1 - \ln x)^1 \\ &= f_1(x) \end{aligned}$$

إذن الدالة $x \rightarrow x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right)$ دالة أصلية للدالة f_1 على $[0; +\infty]$.

Ⓑ② ■

$$\begin{aligned} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt &= \left[x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right) \right]_{e^x}^1 \quad \text{لدينا} \\ &= \frac{3}{4} - e^{2x} \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3e^{2x}}{4} + \frac{xe^{2x}}{2} \end{aligned}$$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x} = 0^- = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0^+ = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{4} - \frac{3e^{2x}}{4} + \frac{xe^{2x}}{2} \right) = \boxed{\frac{3}{4}} \quad \text{فإن} :$$

③ ■

نعود إلى التأطير (*) .

$$\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt < F(x) < \frac{1}{(1+e^{2x})} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \quad \text{لدينا} :$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \right) < \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) < \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{(1+e^{2x})} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{3}{8} < l < \frac{3}{4}}$$

• ③ ■

لدينا حسب التأطير (3)

$$(\forall n \geq 2) ; \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \geq 2) ; \frac{n}{n+1} \leq nu_n \leq \frac{n}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \geq 2) ; \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \leq nu_n \leq \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n-1} \right) = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad \text{إذن حسب التأطير (3) نستنتج :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n-\frac{1}{n}} \right) = 1 \quad \text{و لدينا :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 1 \quad \text{إذن حسب التأطير (4) :}$$

• ④ ■

$n \geq 1$ لتكن

$d_n = |v_n - u_n|$ في البداية لدينا :

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{-1}{2} + \frac{n}{2} v_{n-1} + \frac{1}{2} - \frac{n}{2} u_{n-1} \right| \\ &= \frac{n}{2} |v_{n-1} + u_{n-1}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |v_n - u_n| &= \frac{n}{2} |v_{n-1} - u_{n-1}| \quad \text{إذن :} \\ &= \left(\frac{n}{2} \right) \left(\frac{n-1}{2} \right) |v_{n-2} - u_{n-2}| \\ &= \left(\frac{n}{2} \right) \left(\frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{n-2}{2} \right) |v_{n-3} - u_{n-3}| \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ &= \left(\frac{n}{2} \right) \left(\frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{n-2}{2} \right) \cdots \left(\frac{2}{2} \right) |v_1 - u_1| \end{aligned}$$

$$(\forall n \geq 1) ; d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1 \quad \text{و بالتالي :}$$

• ④ ■

$$(\forall n \geq 2) ; \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2} \quad \text{لنبرهن على أن :}$$

بالترجمة لدينا من أجل

$$(\forall n \geq 2) ; \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2} \quad \text{نفترض أن :}$$

$$\frac{(n+1)!}{2} = (n+1) \frac{n!}{2} \geq (n+1) 3^{n-2} \quad \text{لدينا :}$$

$(n+1) \geq 3$ فإن : $n \geq 2$

و منه : $(n+1) 3^{n-2} \geq 3^{n-1}$ يعني : $(n+1) 3^{n-2} \geq 3 \cdot 3^{n-2}$

• ② ■

الحيز 5 الذي طلب منا حساب مساحته معرف بما يلي :

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_1^e (f_2(x) - f_1(x)) dx \right| \\ &= \left| \int_1^e f_2(x) dx - \int_1^e f_1(x) dx \right| \\ &= |u_1 - u_2| \end{aligned}$$

$$u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n \quad \text{ولدينا :}$$

$$u_0 = \int_1^e x dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right] \quad \text{إذن :}$$

$$u_1 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4}$$

$$u_2 = \frac{-1}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4}$$

و بالتالي :

$$S = |u_1 - u_2| = \left(\frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} \right) - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4} \right) = \frac{1}{2} (\text{unité})^2$$

$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ هي وحدة المعلم و بما أن :

$\text{unité} = 2cm$ فإن :

$(\text{unité})^2 = 4cm^2$ و منه :

$$S = \frac{1}{2} (\text{unité})^2 = [2 cm^2] \quad \text{و بالتالي :}$$

لدينا حسب ما سبق :

$$0 \leq \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{(n+1)}{2} u_n \quad \text{و منه :}$$

$$(1) \quad \frac{1}{(n+1)} \leq u_n \quad \text{أي :}$$

لدينا كذلك :

$$\frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n \leq u_n \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2} + \frac{nu_n}{2} + \frac{u_n}{2} \leq u_n$$

$$\Leftrightarrow u_n \left(\frac{n+1-2}{2} \right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow u_n \left(\frac{n-1}{2} \right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \geq 2) \quad u_n \leq \frac{1}{n-1} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(3) \quad (\forall n \geq 2) ; \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

$$\frac{(n+1)!}{2} \geq 3^{(n+1)-2} \quad \text{إذن :}$$

$$(\forall n \geq 2) ; \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2} \quad \text{و بالتالي :}$$

ج ④ ■

$$(\forall n \geq 2) ; \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2} \quad \text{ننطلق من العلاقة :}$$

$$\Leftrightarrow n! \geq 3^{n-2} \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow n! \geq \frac{3^{n-2} \cdot 2^{n-1}}{2^{n-2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2^{n-2}} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow d_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} d_1$$

بما أن : متالية هندسية أساسها العدد الموجب $\frac{3}{2}$ و الأكبر من 1

$$\lim_{n \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} = +\infty \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{n \infty} d_n = +\infty \quad \text{و منه :}$$

ج ④ ■

$$d_n = |v_n - u_n| \quad \text{لدينا :}$$

نفترض أن $(v_n)_{n \geq 1}$ متالية متقاربة .

و نعلم أن المتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ متقاربة .

إذن : $(d_n)_{n \geq 2}$ متقاربة

$d_n \rightarrow +\infty$: لكن حسب السؤال ج ④ ■

و بالتالي من هذا التناقض نستنتج أن المتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ متباudeة .

و الحمد لله رب العالمين ■