Mathématiques II

Épreuve 2011

Question 1 : On définit les fonctions *ch* et *sh* sur $\mathbf{IR}$, par : $cht = \frac{e^{r}+e^{-r}}{2}$ et $sht = \frac{e^{t}+e^{-t}}{2}$.

On pose pour $t \in R$, M = $\begin{bmatrix} cht & sht \\ sht & cht \end{bmatrix}$,alors spectre de M ,est :

A) $\{e^{t}$,-$e^{t}\}$ B) $\{e^{-t}$,-$e^{t}\}$ C) {-e^{-t},-$e^{t}\}$ D) $\{e^{t},-e^{-t}\}$ E) Autre

Question 2 : On note $I_n = \int_0^1 (\ln(1+x))^n \, dx$, la somme de la série de terme général $\frac{I_n}{n!}$ est :

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) Autre

Question 3: Soit E un espace euclidien de dimension 4 et $B = (e1, e2, e3, e4)$ une base orthonormale de E .On note :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme E associé à la matrice A relativement à la base B :

A) f est un endomorphisme non symétrique non nul et non inversible
B) f est un endomorphisme symétrique non nul et inversible
C) f est un endomorphisme non symétrique non nul et inversible
D) f est un endomorphisme symétrique non nul et inversible
E) Autre

Question 4 : On note F : R^3 →R l'application définie ,pour $tout\ (x, y)\ \in\ R^2$, par :

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^3}$$

A) $F(x,y)\ = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\,(x^3 + 4xy\ + y^3) +\ x^3y^2$

B) $F(x,y)\ = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\,(x^2 + 4\,xy\ + y^3)\ +\ x^3y^3$

C) $F(x\,,y)\ =\ -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}(x^3 + 4xy + y^2)\ +\ x^2y^2$

D) $F(x,y)\ = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(\,x^2 + 4xy + y^2) +\ x^3y^3$

E) $F(x,y)\ = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\,(x^2 + 4xy + y^2)\ -\ x^2y^2$

Question 5 : Soit U et V deux variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs $p_2\ et\ p_1$. Alors la covariance (cov (U , V)) de U et V vérifie :

A) $|\cos(U,V)| \leq \frac{1}{2}$ $B)\,|\cos(U,V\,)| \leq 1$ C) $|\cos(U,V\,)| \leq \frac{1}{4}$ $D)\ |\cos(\,U,V\,)| \leq \frac{1}{3}$ $E)$ Autre

Question 6 : Pour $n \in N$, on pose $S_n = \sum_{K=0}^{n} \frac{k+1}{n^2+K^2+2k+1}$. La suite (S_n) converge vers :

A) $Ln\,2$ B) $\frac{1}{2}\ ln\ 2$ C) $-\,ln\ 2$ D) $-\frac{1}{2}\ ln\ 2$ E) $Autre$

Question 7 : Une variable aléatoire admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in R, f(x) = \frac{a}{1+4x^3}$$

.Pour que f soit effectivement une densité de probabilité , la constante a est :

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{2}{\pi}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{3}{\pi}$ E) Autre

Question 8 : On dispose de n urnes $U_1 U_2 \ldots\ldots\ldots U_n$. Pour tout k de $\{1, 2, \ldots\ldots n\}$,l'urne k contient k boules numérotés de 1 à K .On choisit une urne au hasard et on tire une boule au hasard .Soit X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et Y la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule tirée. Alors la variance de Y est :

A) $\frac{(n-1)(7n+13)}{144}$ $B)\ \frac{(n+1)(7n+13)}{144}$ $C)\ \frac{(n-1)(7n-13)}{144}$ $D)\ \frac{(2n-1)(\,7n+13)}{144}$

D) Autre

Question 9: Soient les matrices P= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Et M telle que P^{-1}MP=D,

$\forall n \in N^*$: M^nest la matrice

A) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6-6(\frac{1}{12})^n & 6-16(\frac{1}{12})^n & 6-6(\frac{1}{12})^n \\ 3-3(\frac{1}{12})^n & 3+8(\frac{1}{12})^n & 3-3(\frac{1}{12})^n \\ 2-9(\frac{1}{12})^n & 2-24(\frac{1}{12})^n & 2-9(\frac{1}{12})^n \end{pmatrix}$

B) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6-6(\frac{1}{12})^n & 6-16\,(\frac{1}{12})^n & 6-6(\frac{1}{12})^n \\ 3-3(\frac{1}{12})^n & 3+8(\frac{1}{12})^n & 3-3(\frac{1}{12})^n \\ 2+9(\frac{1}{12})^n & 2+24(\frac{1}{24})^n & 2-9(\frac{1}{12})^n \end{pmatrix}$

C) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6-6(\frac{1}{12})^n & 6-16(\frac{1}{12})^n & 6-6(\frac{1}{12})^n \\ 3-3(\frac{1}{12})^n & 3+8(\frac{1}{12})^n & 3-3(\frac{1}{12})^n \\ 2-9(\frac{1}{12})^n & 2-24(\frac{1}{12})^n & 2+9(\frac{1}{12})^n \end{pmatrix}$

D) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6-6(\frac{1}{12})^n & 6-16(\frac{1}{12})^n & 6-6(\frac{1}{12})^n \\ 3-3(\frac{1}{12})^n & 3+8(\frac{1}{12})^n & 3-3(\frac{1}{12})^n \\ 2+9(\frac{1}{12})^n & 2-24(\frac{1}{12})^n & 2+9(\frac{1}{12})^n \end{pmatrix}$

Question 10 : Soit θ un paramétre inconnu strictement positif.On considére une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geq 1}$ indépendantes identiquement distribuées de loi de fonction de densité :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta}\left(1-\frac{x}{\theta}\right) & si\ \ 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Et pour tout n, on pose $Sn = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} Xi$ .Alors, le risque quadratique de Sn est :

A)$\frac{2\theta^2}{n}$, B)$\frac{\theta^2}{2n}$, C)$\frac{\theta^2}{n}$, D) $\frac{\theta^2}{3n}$, E) Autre

Question 11 : Soient X_1, X_2 ,X_3 trois variables aléatoires réelles ,discrètes et centrées.

$M = E(Xi, Xj) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Et Y une variable aléatoire centrée. On définit la fonction :

$$F(x_1, x_2, x_3) = E\left[\left(Y - \sum_{i=1}^{3} x_i X_i\right)^2\right]$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il admette un minimum (a,b,c) est :

A) $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(YX_1) \\ E(YX_2) \\ E(YX_3) \end{pmatrix}$ B) $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(YX_1) \\ -E(YX_2) \\ E(YX_3) \end{pmatrix}$ C) $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(YX_1) \\ E(YX_2) \\ -E(YX_3) \end{pmatrix}$

D) $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E(YX_1) \\ E(YX_2) \\ -E(YX_3) \end{pmatrix}$ E) Autre

Question 12 : Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a(x^2)} exp\left\{a\left(\frac{x-1}{x}\right)\right\} & si\ x \in]0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$et\ X\ une\ variable\ de\ fonction\ de\ densité\ f\ .On\ pose\ Y\ = \frac{1}{X} - \left[\frac{1}{X}\right]$

$y = \frac{1}{X} - \left[\frac{1}{X}\right]$ $ou\ [\quad]\ désigne\ la\ partie\ entiére$:

Une fonction densité de Y est :

A) $\begin{cases} \frac{1}{1-e^{-a}} e^{-ay} & si\ y€[0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$ B) $\begin{cases} \frac{a}{1+e^{-a}} e^{-ay} & si\ y€[0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$ C) $\begin{cases} \frac{a}{1-e^{-a}} e^{ay} & si\ y€[0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$

D) $\begin{cases} \frac{a}{1-e^{a}} e^{-ay} & si\ y€[0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$ E) *Autre*

Question 13 : Soit n>0 quelconque $et\ 0 < P < 1$, $(X_i)_{i\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ,suivant la même loi uniforme sur {0, ...,n} et N_n une variable aléatoire indépendante des Xi suivant la loi binomiale B(n,p).

$On\ pose\ U_n = Max(X_0, \ldots\ldots, X_n)$, $V_n = \min\,(X_0 \ldots\ldots\ldots . X_n)$ et $W_n = \min\,(X_0, \ldots\ldots . X_n)$ la fonction H_n de répartition de W_n est :

A)$Hn(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 - p\frac{x}{n}\right)^n & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\ x \geq n \end{cases}$

B)$Hn(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 1 - \left(1 - p\frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\ x \geq n \end{cases}$

C)$Hn(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + p\frac{x}{n}\right)^n & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\ x \geq n \end{cases}$

D) $Hn(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + p\frac{x}{n}\right)^n & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\ x \geq n \end{cases}$

E) Autre

Question 14 : Soit E l'espace vectoriel R$[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients réels et le sous espace vectoriel de E des polynomes de degré inferieur ou égal à 3 .Soit f l'application nul,à tout P de E associe le polynome Q=f(p) définie par Q(X) =P(X) –P(X-1) .On appelle g la restriction de f à F :

A) La dimension de F est 3
B) f est une application linéaire de E dans F ?
C) ker(g)=R
D) la famille (1,X) est une base de Im(g) ?
E) Autre

Question 15 : On considère la fonction numérique f définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e}\ (1+x)^{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)} & si\ x \neq\ 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Alors :

A) f est continue, dérivable en 0 et f'(0) = -1.
B) f est continue, est non dérivable en 0 .
C) f est continue, dérivable en 0 et f'(0)= 1
D) f est continue en 0
E) f est continue, dérivable en 0 et f'(0) = e

Question 16 : On considère la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in R_4(R)$

Et u l'endomorphisme associé relativement à la base canonique B de R^4. *Pour* **λ €R** ,on pose

$E_\lambda = \{\vec{x} \in IR^4\ Tel\ que\ u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\}$

A)$\lambda \notin \left\{-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1\right\}$,alors E_λ est réduit au vecteur nul.

B), $\lambda \notin \left\{0, \frac{1}{3}, 1\right\}$ alors E_λ est réduit au vecteur nul.

C) $\lambda \notin \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right\}$,alors E_λ est réduit au vecteur nul.

D) $\lambda \notin \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right\}$ alors E_λ est réduit au vecteur nul.

E) Autre

Question 17 : M_5 *(R) désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 5 .On note E l'ensemble des A de la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

Ou a et b sont deux réels quelconques. On note I l'élément de E obtenu pour a=1 et b=0 et J celui obtenu pour a=0 et b=1 .Alors, on *a pour p* entier naturel , on a :

A) $A^n = a^nI + \left(\frac{(a-2b)^n - a^n}{2}\right)J$ **B)** $A^n = a^nI + \left(\frac{(a+2b)^n + a^n}{2}\right)J$ **C)** $A^n = a^nI - \left(\frac{(a+2b)^n - a^n}{2}\right)J$

D) $A^n = a^nI + \left(\frac{(a+2b)^n - a^n}{2}\right)J$ E) Autre

Question 18: Pour tout réel α non nul, on définit la matrice A suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$

Alors les valeurs propres de A sont :

A) $\{-\alpha, 2\alpha\}$ B) $\{-\alpha, -2\alpha\}$ C) $\{\alpha, -2\alpha\}$ D) $\{-1, 2\}$ E) Autre

Exercice 19 : Soit X_1, ...X_n n variables aléatoirement indépendantes et suivant la même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.Pour tout i compris entre 1 et n , on pose

$$Y_i = \begin{cases} 1 & si\ X_i = 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \qquad et\ Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Un estimateur sans biais de exp(-θ) est :

A) $\frac{Z_n}{n} + 1$ B) $\frac{Z_n}{n}$ -1 C) $\frac{Z_n}{n}$ D) $\frac{Z_n}{n-1}$ E)Autre

Exercice 20 : Pour tout n€N^*,on note $u_n = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right] = ln(n)$. Pour tout n€$N^*$,on note

$v_n = u_{n+1} - u_n$.Alors u_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$,à :

A) $\frac{1}{n^2}$ B)$\frac{1}{n^2}$ C)$\frac{1}{2n^2}$ D)$\frac{-2}{n^2}$ E)$\frac{-1}{2n^2}$

Mathématiques II

Épreuve 2012

Question 1 : soient p et q deux entiers naturels, et soit a et b deux nombres réels tels que a<b.

On pose $I_{p,q} = \int_b^a (t-a)^p (b-t)^q \, dt$

Après avoir établi une récurrence entre et, réduire l'expression de $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$, déduire l'expression de $I_{p,q}$.

$A)$ $\frac{p!q!}{(p+q-1)!}(a-b)^{p+q}$ B) $\frac{p!q!}{(p+q)!}(a-b)^{p+q+1}$ C) $\frac{p!q!}{(p+q+1)!}(b-a)^{p+q+1}$

D) $\frac{(p+q)!}{(pq)!}(b-a)^{p+q-1}$ E) Autre réponse

Question 2 : Soient X et Y deux variables aléatoires vérifiant :

$\forall (i,j) \in IN^2$, $P\,[(X=i) \cap (Y=j)] = \frac{1}{j!}\frac{a}{2^{i+j}}$

Pour que la formule précédente définisse une loi de probabilité conjointe du couple (X, Y), la constante a est :

A) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ B) $\frac{1}{2\sqrt{e}}$ C) $\frac{1}{2e}$ D) $\frac{1}{2}$ E) Autre réponse

Question 3 : Soit E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On rappelle que si U_1, U_2, U_3, U_4 sont les matrices définies par :

$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de E, qui est donc de dimension 4.

Soient A et B deux matrices de E et $\varphi_{A,B}$ l'application qui, à toute matrice M de E, associe la matrice AM- MB .

$\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de E .

Dans le cas particulier ou A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4) est alors égale à :

A) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ E) Autre réponse

Question 4 : Pour n entier naturel non nul, on pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, alors un équivalent de S_n quand n tend vers l'infini est :

A) n ! B) $\log(n!)$ C) $n \log 2$ D) $\log n$ E) Autre réponse

Note : $\log x$ désigne le logarithme népérien de x ($x \in IR^*{}_+$) .

Question 5 : Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre n invités que l'on note : $I_1, I_2, \dots, I_N$.

Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on modélise l'instant d'arrivée de l'invité I_k par une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 1]. On suppose de plus que, pour tout réel t, les n événements $(T_1 \leq t), (T_2 \leq t), \dots, (T_n \leq t)$, sont indépendants.

Soit un réel t appartenant à [0 ; 1]. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on note B_k la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement $(T_k \leq t)$) est réalisé et la valeur 0 sinon.

Soit S_t la variable définie par : $S_t = B_1 + B_2 + \cdots + B_n, et$ A la variable aléatoire égale a l'instant d'arrivée du premier invité.

Après avoir comparé les évènements : (A>t) et (St=0), déterminer la densité f de la variable aléatoire A.

A) $f\ (t) \begin{cases} t^n & si\ t \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$ B) $f(t) = \begin{cases} n(1-t)^{n-1} & si\ t \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$

C) $f(t) = \begin{cases} 1 - t^n & si\ t \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$ D) $f(t) = \begin{cases} nt^n & si\ t \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$

E) Autre réponse

Question 6 : Soir f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

f(x, y, z) = (x + 2y + 5z , 2x-y , -x +2y –z)

Soit u= (0, 1 , 1 , α) un vecteur de $\mathbb{R}^4$, où α est un nombre réel. Pour quelle valeur de α le vecteur u appartient au sous espace vectoriel Im(f).

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $-\frac{2}{5}$ D) $-\frac{4}{5}$ E) Autre réponse

Question 7 : Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les cotés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.

■ Le pion est sur le sommet 1 au départ.

■ Lorsque le pion est à l'instant donné sur un sommet du carré, il se déplace l'instant

suivant vers un sommet voisin (relié par un coté) avec la probabilité $\frac{1}{4}$ ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité de $\frac{1}{2}$.

On noté Xn la variable aléatoire égale au numéro de sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant n . On a donc X0 = 1 .

Soit A la matrice carrée d'ordre 4 dont le terme situé a l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne est égal à la probabilité conditionnelle p (Xn+1 = i / Xn = j) .

On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A s'écrit comme combinaison linéaire de J et K sous la forme :

A) $A = \frac{1}{3}J + \frac{2}{3}K$ B) A=$\frac{1}{2}J + \frac{1}{4}K$ C) $A = \frac{2}{3}J + \frac{1}{3}K$ D) A=$\frac{1}{4}J + \frac{1}{2}K$

E) Autre réponse

Question 8 : Pour n entier naturel non nul, on pose Sn=$\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}$, alors un équivalent de Sn quand n tend vers l'infini est :

A) $\sqrt{n}$ B) $\sqrt{2n}$ C) $2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$ D) $2(\sqrt{2}+1)\sqrt{n}$ E) Autre réponse

Question 9 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0;\ 1]$

L'espérance de la variable aléatoire Y définie par Y=$\frac{X}{2-X}$ est :

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\ln 2}{2}$ C) $2\ln 2-1$ D) $4\ln 2+1$ E) Autre réponse

Question 10 : Une urne contient 10 boules rouges et 2 boules jaunes. On extrait les boules de l'urne au hasard, une à une et sans remise, jusqu'à l'apparition d'une boule rouge.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires.

La variance de la variable X est alors égale à :

Question 11 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :

$f_n :\ R_+^* \ \to R$

$$x \to\ f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{x^n\ln x}{x^2-1} & si\ x\neq 1\\ \dfrac{1}{2} & si\ x=1\end{cases}$$

N.B : ln désigne le logarithme népérien.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable en 1 ; de plus, la dérivée de f_n en 1 égale à :

A) $-\frac{1}{2}+7n$ B) $-\frac{1}{2}+3n$ C) $\frac{n+1}{2}$ D) $\frac{n-1}{2}$ E) Autre réponse

Question 12 : Soit f la fonction réelle définie et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est positive et qu'elle vérifie la propriété $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; On désigne par F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,.$$

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2, et soit X_1, X_2,..., X_N N variables aléatoires réelles indépendantes ayant toutes la même fonction de répartition F. On définit la variable aléatoire réelle Y_N par Y_N = Max(X_1, X_2,..., X_N) alors YN admet une densité de probabilité g définie par :

A) $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) = Nf(x)[F(x)]^{2N-2}$
B) $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) = Nf(x)[F(x)]^{N-1}$
C) $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) = NF(x)[f(x)]^{N-1}$
D) $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) = [f(x)]^{N}$
E) Autre réponse

Question 13 : Soit U une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$.

En utilisant la définition de la variance de U, calculer $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$

A) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2\pi}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ D) $\frac{3\sqrt{\pi}}{2}$ E) Autre réponse

Question 14 : On considère la suite (Sn) définie par :

$\forall n \in IN^*$: $\quad Sn = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$

La suite (S_n) converge vers :

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}\ln 2$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{3}{2}\ln 2$ E) Autre réponse

Question 15: α désigne un paramètre réel.

On considère la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & +1 \end{pmatrix}$

Et on note φ_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$représenté par A_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Quel que soit α, l'endomorphisme φ_α admet les valeurs propres :

A) $(\alpha - 1)\ et\ (\alpha + 1)$ B) 1 et $(\alpha - 1)$ C) -1 et $(\alpha - 1)$ D) 1 et $(\alpha + 1)$

E) Autre réponse

Question 16 : Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$f(x) = (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - \sqrt[3]{x^3 + 1}\,)^x;$

Alors $\lim_{x \to +\infty} f\,(x) =$

A) $+\infty$ B) $\frac{1}{3}$ C) e D) $\frac{1}{e}$ E) Autre réponse

Note : e désigne la base du logarithme népérien.

Question 17 : On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Après avoir déterminé une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, de deuxième ligne (-1, 1, 1) telle que $A = PDP^{-1}$, calculer la matrice $c = P^{-1}BP$

A) $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ B) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ C) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

D) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ E) Autre réponse

Question 18 : On considère le système linéaire suivant :

$$(S) : \begin{cases} x + \lambda y = \alpha \\ \lambda x + y = \beta \\ x + \lambda y + z + \lambda t = y \\ x - \lambda + \lambda z + t = \delta \end{cases}$$

où $(\lambda, \alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^5$

La condition nécessaire pour que le système admette une infinité de solution est :

A) $\lambda \in \{0, 2\}$ B) $\lambda \in \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$ C) $\lambda \in \{-1, 1\}$ D) $\lambda \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

E) Autre réponse

Question 19 : Au cours d'un scrutin, des enquêteurs organisent un sondage à la sortie des bureaux de vote. On considère que le scrutin débute à l'instant 0 et s'achève à l'instant 1. La liste électorale comprend n noms, numérotés de 1 à n. Il ne peut pas y avoir d'abstentions. On modélise l'instant d'arrivée de l'électeur i , $1 \leq i \leq n$, par une variable aléatoire X_i de loi uniforme sur le segment $[0,1]$.

Les variables X_i sont supposées mutuellement indépendantes. On note :

$(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ les n variables aléatoires ayant pour valeurs les valeurs variables

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ordonnées dans l'ordre croissant . Par exemple, pour n=4, si on obtient

$X_1 = 0{,}3$; $X_2 = 0{,}1$; $X_3 = 0{,}7$; $X_4 = 0{,}2$, on aura :

$Y_1 = 0{,}1$; $Y_2 = 0{,}2$; $Y_3 = 0{,}3$; $Y_4 = 0{,}7$.

Soit $Y_n = max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ l'instant d'arrivée du dernier volant. La variance de Y_n est alors égale à :

A) $\frac{n}{(2n+1)(n+3)}$ B) $\frac{2n}{(n+1)(n+4)}$ C) $\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$ D) $\frac{2n}{(n+3)^2(n+1)}$

E) Autre réponse

Question 20 : Soit f la fonction de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{(1+x)^{\frac{\ln x}{x}} - x}{x(x^x - 1)}$;

Alors $\lim_{x \to 0+} f(x)$

A) $-\infty$ B) -1 C) $-\frac{1}{2}$ D) $+\frac{1}{2}$ E) Autre réponse

Groupe ISCAE

CONCOURS D'ACCES A LA GRANDE ECOLE

ANNEE 2013

MATHEMATIQUES II

DUREE : 3 heures

N.B :

1. Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

2. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

3. Les téléphones portables sont strictement interdits et doivent être éteints.

4. Les réponses aux questions devront être portées sur la grille distribuée en complément du sujet.

5. Il ne sera admis qu'une seule réponse par question.

6. Le barème suivant sera adopté:

Réponse correcte: +2

Réponse fausse: - 1

Pas de réponse: 0

Il y a 20 questions totalement indépendantes.

Question 1 :

Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 muni de sa structure d'espace vectoriel et soit J la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère l'application S de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même qui associe à tout élément M de $M_2(\mathbb{R})$ l'élément S (M) = J M J

L'application S est un automorphisme de l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$.

De plus , si M et N sont deux éléments quelconques de $M_2(\mathbb{R})$, on a :

S (M N) = S (M) S (N)

On considère les éléments :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice représentant l'automorphisme S dans la base (I , J , K , L) est alors égale à :

$A)\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $C)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$D)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $E)$ *Autre réponse*

Question 2 :

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$$

Après avoir déterminé l'expression de $f'(x) + f(x)$, pout tout réel x , (où $f'(x)$ est la dérivée de de f en x) , on en déduit que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge vers :

$A)\ \dfrac{\ln 3}{2}$ $B)\ 2\ln 2$ $C)\ \dfrac{\ln 2}{3}$ $D)\ 3\ln 5$ $E)$ *Autre réponse*

Question 3 :

On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ où x , y et z sont des réels .

On note φ l'application linéaire de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ qui à toute matrice A de $\mathcal{F}$ associe le nombre :

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}\, a_{i\,j} \quad ,$$

où $a_{i\,j}$ désigne l'élément de la matrice A situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

On note Ker φ le noyau de φ . La dimension de Ker φ est alors égale à:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Autre réponse

Question 4 :

Soit $f_k(x) = \dfrac{(\ln(x))^k}{x-1} \quad si\; x \neq 1 \quad et \quad f_k(1) = 0 \quad , où\; k \in N \cdot$

Pour quelles valeurs de k , f_k est continue en 1 ?

A) $k \in [\,2\,, +\infty\,[$ B) $k \in [\,1\,, +\infty\,[$ C) $k \in]\,1\,, 2\,]$ D) $k \in]\,1\,, +\infty\,[$
E) Autre réponse

Question 5 :

On rappelle que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad et \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

On considère un nombre entier $n \geq 2$ et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n .
On extrait de cette urne successivement et sans remise 2 jetons et on désigne alors par :
N_1 la variable aléatoire indiquant le numéro du premier jeton tiré ,
N_2 la variable aléatoire indiquant le numéro du second jeton tiré .
On pose : $Z = N_1 + N_2$
La variance de la variable aléatoire Z est alors égale à :

$A)\ \dfrac{(n-1)(n+3)}{6}$ $B)\ \dfrac{(n+2)(n-3)}{6}$ $C)\ \dfrac{(n+1)(n-2)}{6}$ $D)\ \dfrac{(n+5)(n-4)}{6}$

E) Autre réponse

Question 6 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+k+1}{k!}$

La suite (S_n) converge vers :

A) 0 ; B) $4e$; C) $\ln 2$; D) $\frac{1}{2}$; E) Autre réponse

Question 7 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.
On pose : $Y = \ln(e^X - 1)$
Calculer $E(X)$.

A) $\ln 2$; B) 0 ; C) $\frac{e \ln 2}{2}$; D) $e-1$; E/ Autre réponse

Question 8 : Pour tout réel m non nul, on définit la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m^2} \\ m & 0 & \frac{1}{m} \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des valeurs propres de A est :
A/ $\{-m, m\}$; B/ $\{m, 2m\}$; C/ $\{m, 2\}$; D/ $\{-1, 2\}$; E/ Autre réponse

Question 9 : Soit $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et suivant la même loi ~~uniforme sur $[0, a]$, où a est un nombre réel non nul.~~

On pose : $T_n = Max(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n)$ et $T_n' = \frac{n+1}{n} T_n$

La variance de T_n' est :

A) $\frac{a}{n+1}$; B) $\frac{a}{2n}$; C) $\frac{a^2}{n(n+2)}$; D) $\frac{n}{a}$; E) autre réponse

Question 10 : Soient les matrices :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M \text{ telle que } M = PDP^{-1}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: M^n est la matrice :

A) $M^n = (2^n - 1)M + (2 - 2^n)I_3$; B) $M^n = (2^n + 1)M + (1 - 2^n)I_3$;
C) $M^n = 2^n M + (1 - 2^n)I_3$; D) $M^n = 2^n M + (1 + 2^n)I_3$; E) Autre réponse

Question 11 : Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^1 [\mathrm{Log}(1+x)]^n dx$

Log désigne le logarithme népérien. On cherche un équivalent de I_n quand n tend vers l'infini;

On pourra commencer par étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis par voir la relation de récurrence liant I_{n+1} à I_n, et enfin par trouver un encadrement de I_n

Alors, un équivalent de I_n quand n tend vers l'infini est:

A) $\frac{1}{n}(Log2)^{n+1}$; B) $\frac{2}{n}(Log2)^{n+1}$; C) $\frac{2^{n+1}}{n}$; D) $\frac{2^n}{n}$; E: Autre Réponse

Question 12 : Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x^n)} dx$

Log désigne le logarithme népérien. On cherche un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini;

On pourra commencer par remarquer que $(\forall x \geq 0)\ \frac{1}{1+x} \leq 1$; puis par étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^1 \mathrm{Log}(1+x^n)dx$; puis par voir la relation de récurrence liant u_n à I_n.

Alors, un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini est:

A) $\frac{1}{n}(Log2)^{n+1}$; B) $\frac{2}{n}(Log2)^{n+1}$; C) $\frac{2^{n+1}}{n}$; D) $\frac{\mathrm{Log}2}{n}$; E: Autre Réponse

Question 13 : La somme $S=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$ est égale à:

A) e^3 ; B) $e^{\sqrt{3}}$; C) $\frac{1}{2}(e^{\sqrt{3}}+e^{-\sqrt{3}})$; D) $\frac{1}{2}(e^{\sqrt{3}}-e^{-\sqrt{3}})$; E) Autre réponse

e désigne la base du logarithme népérien

Question 14 : La somme $S=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ est égale à:

A) 1 ; B) 2 ; C) $\frac{\pi^2}{12}$; D) $\frac{\pi^2}{6}$; E) Autre réponse

Question 15 : La somme $S=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ est égale à:

A) e ; B) $\frac{1}{e}$; C) $\frac{1}{2}(e+\frac{1}{e})$; D) $\frac{1}{2}(e-\frac{1}{e})$; E) Autre réponse

e désigne la base du logarithme népérien

Question 16: Calculer $I = \iint_D f(x,y)dxdy$

Dans le cas où D est le triangle de sommets O(0,0), A(1,0), B(0,1) et $f(x, y) = \ln(x+y+1)$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{4}$ E) Autre réponse

Question 17: On se donne les matrices

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ 232 & -15 \end{pmatrix}$

Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Les matrices inversibles P telles que $P^{-1} A P = B$ sont de la forme :

A) $\begin{pmatrix} 15b-d & b \\ -8b & d \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 8b+2d & b \\ 15b & d \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} -15b-d & b \\ -8b-16d & d \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} 15b+d & 2b \\ -8b+d & 2d \end{pmatrix}$;

E) Autre réponse

Question 18 Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

Alors $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f(x,y) =$

A) 0 ; B) 1 ; C) -1 ; D) ½ ; E) Autre réponse

Question 19 a, b, c et d étant des nombres réels, les matrices carrées $A = (a_{ij})$ d'ordre 4 qui commutent avec la matrice $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

sont de la forme :

A) $aI + bJ^2$; B) $aJ + bJ^2 + cJ^3$; C) $aI + bJ + cJ^2 + dJ^3$; D) $aI + bJ^3$; E) Autre réponse

Question 20 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$f(x,y) = 2x^2+2y^2+2xy-x-y$

f présente

A) un minimum local en A(1/6,1/6) ; B) un minimum global en A(1/6,1/6) ;
C) un maximum local en B(-1/6,1/6) ; D) un maximum global en B(-1/6,1/6) ; E) Autre réponse

Groupe ISCAE

CONCOURS D'ACCES A LA GRANDE ECOLE

ANNEE 2014

MATHEMATIQUES II

DUREE : 3 heures

N.B :

1. **Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matérie électronique est interdite.**

2. **Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.**

3. **Les téléphones portables sont strictement interdits et doivent être éteints.**

4. **Les réponses aux questions devront être portées sur la grille distribuée en complément dı sujet.**

5. **Il ne sera admis qu'une seule réponse par question.**

6. **Le barème suivant sera adopté:**

Réponse correcte: +2

Réponse fausse: - 1

Pas de réponse: 0

Il y a 20 questions totalement indépendantes.

Question 1 : Soit X une variable aléatoire réelle ayant une densité de probabilité f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \ x \prec 0 \\ c\exp(-\frac{x^2}{2}) & si \ x \geq 0 \end{cases}$$

où c est une constante (éventuellement à calculer).

La variance de X est égale à:

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2\pi}$ C) $1-\frac{2}{\pi}$ D) 1 E) Autre réponse

Question 2: Soit α un réel non nul. On considère la suite $(p_n)_{n\succ 0}$ définie par : $\forall n \in IN^*,\ p_n = \frac{1+\alpha^{n-1}}{4(n-1)!}$ La suite $(p_n)_{n\succ 0}$ définit une loi de probabilité pour α égal à:

A) $2e+1$; B) $2e-1$; C) $\ln(e-2)$; D) $\ln(4-e)$; E) Autre réponse

Question 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}x\mathbb{R}$ par:

$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = xe^{x(y^2+1)}$.

f présente un extremum :

A) local en A(1,0); B) local en A(-1,0); C) global en A(-1,0); D) global en A(1,0);

E) Autre réponse

Question 4 : Pour toute matrice M de $M_2(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la transposée de M, et φ l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ qui à toute matrice M de $M_2(R)$ associe

$\varphi(M) = M + {}^tM$.

La dimension du sous-espace vectoriel Im φ est égale à:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Autre réponse

Question 5 : Soit $(m;\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et X une variable aléatoire réelle ayant une densité de probabilité f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \ x \prec 0 \\ c\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}) & si \ x \geq 0 \end{cases}$$

où c est une constante qui dépend de m et σ (éventuellement à calculer).
On désigne par Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

L'espérance mathématique de X est égale à:

A) $|m|$ B) $m + \frac{\sigma}{\Phi(\frac{m}{\sigma})\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{m^2}{2\sigma^2})$ C) $m + \frac{\sigma\Phi(\frac{m}{\sigma})}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{m^2}{2\sigma^2})$

D) $m + \frac{\sigma}{\Phi(\frac{m}{\sigma})\sqrt{2\pi}}$ E) Autre réponse

Question 6 : Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X, définie sur IR par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \ \ x \prec 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} & si \ x \geq 0 \end{cases}$$

L'espérance de X est :

A) $\frac{3}{2}$; B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; C) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; D) $\sqrt{\pi}$; E) Autre réponse

Question 7 : On considère la série de terme général $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{n!}$.

Cette série est convergente de somme:

A) $\frac{e}{3}$ *B)* $\frac{e}{6}$ *C)* $\frac{3e}{5}$ *D)* e *E) Autre réponse*

Question 8 : Soit f la fonction réelle de la variable réelle x définie par $f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$.

Un équivalent de $f(x) - x \quad quand \ x \to +\infty$ est:

A) $-x$ B) $-\frac{1}{x}$ C) $-\frac{1}{2x}$ D) $\frac{1}{2x}$ E) Autre réponse

Question 9 : Trois enfants A , B , C jouent à la balle .

- Lorsque A a la balle , la probabilité pour qu'il la lance à B est $\frac{3}{4}$, la probabilité pour qu'il la lance à C est $\frac{1}{4}$.
- Lorsque B a la balle , la probabilité pour qu'il la lance à A est $\frac{3}{4}$, la probabilité pour qu'il la lance à C est $\frac{1}{4}$.
- C envoie toujours la balle à B .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par A_n (respectivement B_n , C_n) l'événement : " A (respectivement B , C) a la balle à l'issue du $n^{ième}$ lancer " .

On pose : $a_n = p(A_n), b_n = p(B_n), c_n = p(C_n)$.

Au départ la balle est lancée à l'un des trois joueurs : c'est par convention le lancer numéro 0 .

Donc on pose : $a_0 = p(A_0), b_0 = p(B_0), c_0 = p(C_0) \ avec \ a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

On pose, pour $n \in N$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Il existe une matrice $D \in M_3(\mathbb{R})$ telle que:

$\forall n \in N, \ X_n = D^n . X_0$, où :

$A) \ D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$ $B) \ D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ $C) \ D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$

$D) \ D = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$ *E) Autre réponse*

Question 10 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$

et par $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. La suite est strictement positive à partir du rang 1.

On pose $\quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) =$

A) $+\infty$ B) $\dfrac{3}{2}$ C) $\dfrac{15+5\sqrt{5}}{16}$ D) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ E) Autre réponse

Question 11 : La limite de la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ définie par: $u_n = \dfrac{n^2(\ln(n+1)-\ln(n))}{\sqrt{n^2+1}}$, est:

A) 1 ; B) $\dfrac{2e-1}{3}$; C) 2 ; D) $+\infty$; E) Autre réponse

Question 12 : On note $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble E des matrices T de $M_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ de dimension égale à:

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) Autre réponse

Question 13 : On désigne par Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. L'intégrale $\displaystyle\int_{2-\sqrt{2}}^{2} \exp(-x^2+4x-2)dx$ est égale à:

A) $e^{-2}\Phi(2)\sqrt{\pi}$; B) $e^2\sqrt{2\pi}\ (\Phi(2)-\dfrac{1}{2})$; C) $e^2\sqrt{\pi}\ (\Phi(2)-\dfrac{1}{2})$; D) $\sqrt{2\pi}\ \Phi(2)$;

E) Autre réponse

Question 14 : Soient X_1 *et* X_2 deux variables aléatoires discrètes finies, indépendantes, et de même loi de probabilité, avec:

$$\forall i \in \{1, 2\}, \quad p(X_i = 0) = \frac{1}{6} \quad , \quad p(X_i = 1) = \frac{1}{3} \quad et \quad p(X_i = 2) = \frac{1}{2}$$

$On\ pose:\ S = X_1 + X_2 \quad et \quad P = X_1 X_2$

Le coefficient de corrélation linéaire de S et P est égal à :

A) 0 B) -1 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) Autre réponse

Question 15 : Pour $n \in IN^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} k}{4k^2 - 1}$. La suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers :

A) $e^2 + 1$; B) $\frac{1}{4}$; C) $\frac{e}{4}$; D) $\ln 2$; E) Autre réponse

Question 16: On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Après avoir montré que A est diagonalisable, on aboutit à A^n pour n entier naturel non nul, égal à:

A) $A^n = \begin{pmatrix} -2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^{n+1} + 2 \times 5^n & 5^n \end{pmatrix}$; B) $A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^{n+1} + 2 \times 5^n & 5^n \end{pmatrix}$;

C) $A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^n & 0 \\ 2^n & (-1)^n + 2^n & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^n + 2 \times 5^n & 5^n \end{pmatrix}$; D) $A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2 \times 2^n & 0 \\ (-1)^n + 2^{n+1} & (-1)^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & 2 \times 5^n & 5^n \end{pmatrix}$;

E) Autre réponse

Question 17: On considère deux pièces truquées A et B ; A donne pile avec la probabilité a $(0 < a < 1)$, et B donne pile avec la probabilité b $(0 < b < 1)$.
On choisit une pièce au hasard et on la lance: si on obtient pile, on relance la même pièce, sinon on lance l'autre pièce. On poursuit ce processus k fois $(k \geq 2)$.
La limite de la probabilité de lancer la pièce A au $k^{\text{ième}}$ lancer lorsque k tend vers l'infini est égale à:

A) $\frac{b}{a+b}$ *B)* $\frac{1-b}{a-b+1}$ *C)* $\frac{1-a}{1-a+b}$ *D)* $\frac{a}{a+b}$ *E) Autre réponse*

Question 18 On désigne par tr(M) la trace d'une matrice carrée à coefficients réels M.
Soient A et B $\in Mn(\mathbb{R})$, des matrices vérifiant $AB - BA = A$
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{tr}(A^p) =$

A) tr(A) B) tr(AB) C) 0 D) tr(B) E) Autre réponse

Question 19 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 3 & -2-\lambda & -4 \\ -2 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \quad \text{où } \lambda \text{ est un paramètre réel.}$$

et f l'endomorphisme associé à A relativement à la base canonique de IR^3.
Les valeurs de λ pour lesquelles la dimension de Ker f est égale à 1, sont:

A) $\lambda \in \{-1,1,3\}$; B) $\lambda \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$; C) $\lambda \in \left\{-3, \frac{1}{3}\right\}$; D) $\lambda \in \left\{-4, \frac{1}{4}, 4\right\}$;
E) Autre réponse

Question 20 Soient α, β, δ, λ quatre nombres réels vérifiant les conditions:

$$\begin{cases} 0 \prec \alpha \ ; \ 0 \prec \beta \prec \dfrac{1}{2} \\ 0 \prec \delta \ ; Max(0, \ln(2\delta)) \prec \lambda \end{cases}$$

et soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition F définie par,

$$F : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to [0;1] \\ t \mapsto \text{Proba}[X \leq t] \end{array} \right. \text{ est la fonction suivante: } F(t) = \begin{cases} \beta \exp(\alpha t) & si\ t \prec 0 \\ \dfrac{1}{2} & si\ t \in [0;1[\\ 1 - \delta \exp(-\lambda t) & si\ t \geq 1 \end{cases}$$

On appelle médiane de X, tout nombre réel m vérifiant la condition suivante: $\begin{cases} \text{Proba}[X \leq m] \geq \dfrac{1}{2} \\ \text{Proba}[X \geq m] \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Alors l'ensemble des médianes de X est

A) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ B) $]0;1[$ C) $]0;1]$ D) $[0;1[$ E) Autre Réponse