TAALIMPRO

ASSISTANT DES ÉLÈVES & ETUDIANTS MAROCAIN

المملكة المغربية

Royaume du Maroc

Ecole Hassania des Travaux Publics

المدرسة الحسنية للأشغال العمومية

CONCOURS D'ACCES EN 1ère ANNEE

Réservé aux titulaires du DEUG

ANNALES : 2002 - 2003 - 2004 - 2005 - 2006 – 2007
2008 – 2009 – 2010 - 2011

Récupéré les énoncés des années précédents seulement à 20.00dh chez services photocopie à l'EHTP (salle tirage)

Problème

L'épreuve est constituée de trois parties, et propose l'étude de quelques propriétés de la fonction J_0 de Bessel (utilisée notamment en physique).

Partie I

Étude de la fonction $J = J_0$ de Bessel. Développement en série entière

1°. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $J(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\big(x.\sin(\theta)\big)\, d\theta$.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$J(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\big(x.\sin(\theta)\big)\, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\big(x.\sin(\theta)\big)\, d\theta.$$

(b) Montrer que la fonction $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ainsi définie est continue, paire et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

(c) Justifier que J est bornée sur $\mathbb{R}$.

(d) Justifier l'encadrement :

$$\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \qquad \frac{2\theta}{\pi} \leqslant \sin(\theta) \leqslant \theta.$$

En déduire un encadrement de $J(x)$ pour $x \in]0, 2]$.

(e) Préciser les valeurs de $J(0)$, $J'(0)$. Montrer que J est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

2°. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(\theta)\, d\theta$.

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad (2n+1)\, I_n = 2(n+1)\, I_{n+1}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad I_n = \dfrac{(2n)!\pi}{(n!)^2\, 2^{2n+1}}$.

3°. (a) Rappeler le développement en série entière de la fonction cos et son rayon de convergence. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $x \mapsto \cos\big(x.\sin(\theta)\big)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et préciser ce développement.

(b) En déduire que J est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2}\, x^{2n}$$

(on précisera le théorème du cours utilisé pour l'intégration terme à terme).

Epreuve de Mathématiques

Durée 4 h

L'usage des machines à calculer est interdit

La présentation et la rigueur de la rédaction seront deux éléments importants dans l'appréciation des copies .
En particulier il est demandé d'énoncer avec précision les hypothèses des théorèmes utilisés .
L'énoncé comporte trois pages .Chaque question peut être traitée en admettant les résultats des questions précédents.

Exercice

Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ respectivement représentés dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ par les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 12 & 3 & 8 \\ -12 & -4 & -9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1°) Former les polynômes caractéristiques de f et de g.
En déduire les valeurs propres de f et de g.

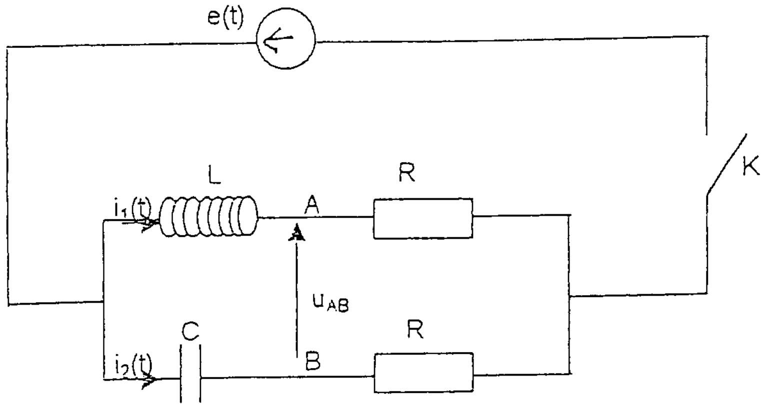
2°) Déterminer, par leurs équations, les sous-espaces propres de f et de g.

3°) Construire une base $\mathcal{B}^*$ de $\mathbb{R}^3$ dont les vecteurs sont à la fois vecteurs propres de f et vecteurs propres de g ; la première composante non nulle de chacun de ces vecteurs sera obligatoirement prise égale à 1.

4°) Donner les matrices de passage directe et inverse de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}^*$, ainsi que les matrices A' et B' qui représentent respectivement f et g dans $\mathcal{B}^*$.

PREMIERE PARTIE : ELECTRICITE

A- On considère le circuit ci-dessous :



e(t) est un générateur de tension sinusoïdale de f.e.m $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t)$ et de résistance négligeable.

L est une bobine d'inductance L et de résistance négligeable.

C est un condensateur parfait de capacité C .

R réristors de même résistance R

On ferme l'interrupteur K, dans la suite on s'intéressera au régime permanent

1/ Déterminer les expressions des valeurs efficaces I_1 et I_2 des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ passant respectivement dans la bobine et dans le condensateur (On pourra utiliser la résolution complexe)

2/ Déterminer également les phases φ_1 et φ_2 des courants $i_1(t)$ et $i_2(t$

3/ En déduire les expressions de $i_1(t)$ et $i_2(t$

4/ Déterminer la relation liant R, L et C pour que $i_1(t)$ et $i_2(t)$ soient en quadrature de phase (déphasé de $\frac{\pi}{2}$) quelle que soit la fréquence.

5/ La condition 4- étant établie, déterminer la valeur efficace de la tension u_{AB}.

B- On remplace dans le montage précédent le générateur de tension sinusoïdal par un générateur de force électromotrice continue E et de résistance négligeable.

1/ le condensateur C étant déchargé et aucun courant ne circulant dans le réseau, on ferme, à l' instant t =0, l'interrupteur K.

a- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le courant $i_1(t)$, résoudre cette équation et donner l'expression de $i_1(t)$.

b- Déterminer également le courant $i_2(t)$ et tracer son allure .

2/ le régime permanent étant atteint, on ouvre K. :

a- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le courant $i_1(t)$

b- En déduire l'expression de i_1 en fonction du temps.

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

Partie II

Étude d'une équation différentielle

4°. Vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x\big(J(x) + J''(x)\big) + J'(x) = 0.$$

5°. Montrer que l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$, est un espace vectoriel réel de dimension 1, engendré par J.

6°. Soit $K \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$.

Pour tout $x > 0$ on pose : $W(x) = J'(x)K(x) - J(x)K'(x)$.

Montrer que $W \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, et est telle que pour tout $x > 0$, on ait : $W'(x) = -\dfrac{1}{x}W(x)$.

En déduire la forme de W.

7°. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{H_{n+1}}{H_n}\right) = 1$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}H_n}{4^n(n!)^2}\, x^{2n}$.

Vérifier que le rayon de convergence de cette série entière est bien égal à $+\infty$. Pour tout réel x, expliciter (sous forme d'une série entière simple) la valeur de l'expression $x\varphi''(x) + \varphi'(x) + x\varphi(x)$ et la comparer avec $-2\,J'(x)$.

(c) Pour tout $x > 0$, on pose : $K(x) = \ln(x)\,J(x) + \varphi(x)$.

Vérifier que K est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$, et expliciter la fonction W associée définie au 6°.

Que peut-on en déduire ?

Fin

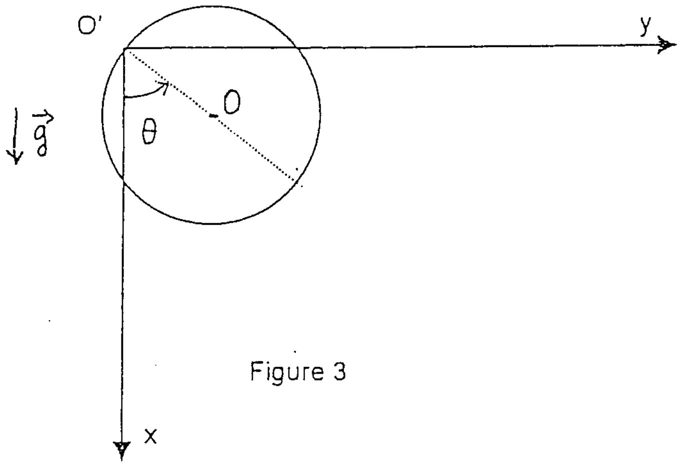


Figure 3

a- Etablir l'équation différentielle vérifiée par θ.

b- On s'intéresse aux petits mouvements de D autour de sa position d'équilibre stable.
On appelle portrait de phase la courbe représentant $\frac{d\theta}{dt}$ en fonction de θ, représenter le portrait de phase dans le cas des petits mouvements.

4- On ôte à D un canal rectiligne de dimension négligeable, un point matériel P de masse m' est placé dans ce canal, il peut y glisser sans frottement, la position de P est repéré par x, Ox étant confondu avec le canal (figure 4) On considère que la liaison P-canal est bilatérale.

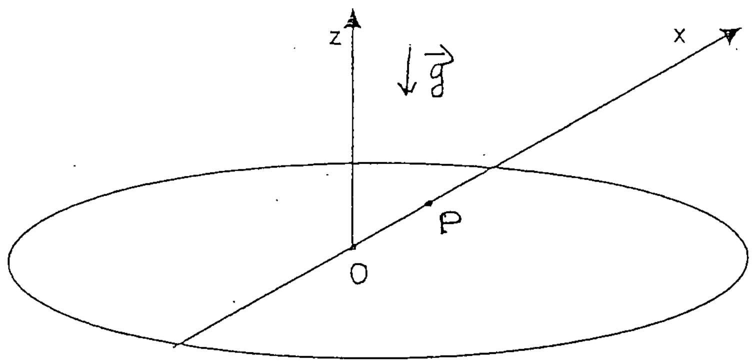


Figure 4

On suppose que le disque D tourne autour de son axe Oz à la vitesse angulaire ω.

a- Etablir l'équation différentielle vérifiée par x.

b- Déterminer les positions d'équilibre de P par rapport à D.

c- Calculer l'énergie mécanique du système { D + P }.

DEUXIEME PARTIE : MECANIQUE

On considère un disque D homogène de centre O, de masse m et de rayon a.

1/ on note J le moment d'inertie de D par rapport à un axe OZ passant par O, soit α l'angle que fait OZ avec le diamètre AB de D (figure 1).

a- Calculer J en fonction de m, a et α.

b- En déduire la matrice d'inertie de D par rapport au repère (Ox, Oy ,Oz)(figure 2)

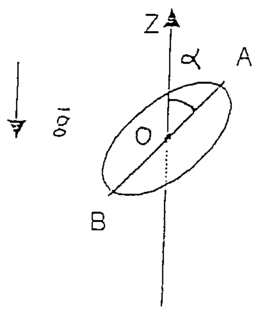


figure 1

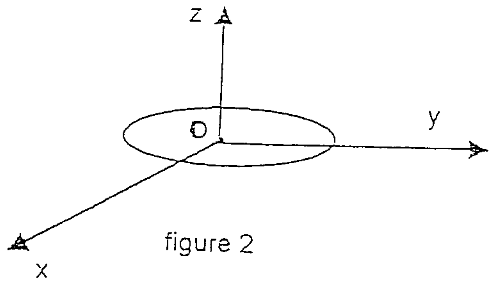


figure 2

2/ On considère D dans la situation de la figure 1, un moteur exerce un couple de forces sur D de moment $\vec{\Gamma} = \Gamma(t)\vec{e}_z$ ce qui provoque sa rotation autour de l'axe vertical OZ à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$,

a- Calculer le moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ de D dans son mouvement autour de OZ.

b- Dans cette partie on néglige les frottements (la liaison pivot est parfaite)

En appliquant le théorème du moment cinétique à D, déduire l'équation différentielle vérifiée par ω.

c- En fait les frottements sont inévitables, leurs actions sont modélisées par un couple de moment $\vec{\Gamma}_f = -h\omega\vec{e}_z$.

c-1- Le couple exercé par le moteur est constant $\Gamma = \Gamma_0$, déterminer ω (t)sachant que D part du repos..

c-2- En réalité il est difficile de réaliser un couple rigoureusement constant, Γ (t) fluctue autour de Γ_0 ce que l'on peut modéliser par $\Gamma(t) = \Gamma_0(1 + \cos\beta t)$ (β est une constante positive) .

- Etablir la nouvelle équation vérifiée par ω.
- Déterminer ω en régime permanent.
- Comment on peut minimiser les fluctuations de ω ?

3/ Dans cette partie D est articulé en O' et peut tourner autour de l'axe horizontal O'z (figure 3), la liaison est parfaite .D reste dans le plan vertical.

1 . Résumez ce texte en 170 mots, avec une tolérance de plus ou moins 10% . Indiquez à la fin de votre résumé le nombre de mots utilisés.

2. Donnez un titre à ce texte

3 . VOCABULAIRE

Vous donnerez le sens , dans le texte, des expressions soulignées

- les tâches les plus rebutantes;
- la bureaucratie la plus tatillonne
- une aide bénévole

4.DISCUSSION

- Que pensez-vous du sort réservé aux immigrés ? (une page au minimum).

Conseils pratiques

- Résumer suppose une grande fidélité au texte.
- N'ajoutez ni ne retranchez rien;
- Conservez la personne utilisée,
- Evitez toute formule du genre "l'auteur dit que";
- Respectez l'ordre et la logique du texte.
- Ne reprenez pas les mots - et encore moins des parties de phrases - du texte.

Concours d'accès en 1ère année EHTP

Candidats titulaires du CUES ou DEUG

EPREUVE DE FRANCAIS

DUREE 3 HEURES

Le cas des immigrés commence heureusement à devenir plus clair dans l'esprit de beaucoup. Oh ! le racisme n'est pas mort, loin de là ! du moins sa dénonciation n'est-elle plus tout à fait sans effet : le plus souvent, le racisme est devenu honteux. Il se défend vigoureusement de l'être, il accuse, au contraire, d'être raciste celui qu'il rejette pour sa langue, son origine, ou, bien sûr, sa couleur, car chacun sait que le blanc n'est pas une couleur. Ce n'est qu'un progrès modeste sans doute, mais c'est quand même un progrès.

Seulement, le racisme n'est qu'un des éléments - le plus sensible peut-être, non le plus grave au fond - du sort des immigrés. La honte, c'est plus encore, la situation matérielle qui leur est faite. Ils sont importés comme les animaux du zoo et souvent moins logés qu'eux. Ils assument les tâches les plus rebutantes, les métiers les plus durs et, parfois, les plus malsains, ceux dont les français ne veulent plus. Ils sont payés juste assez pour que, du fond de leur misère, dans leurs douars écrasés de soleil et leurs villages aux terres arides, d'autres, malheureux comme eux, rêvent de devenir, à leur tour, manoeuvres chez Renault, mineurs dans le Pas-de-Calais, éboueurs à Paris, cet eldorado.

Parqués, rejetés, condamnés à la solitude, ils sont des victimes de choix pour les petits chefs les plus hargneux, la bureaucratie la plus tatillonne la police la plus soupçonneuse, qui les suspecte à priori de tous les vols et de tous les viols, bien que, parmi eux, le taux de criminalité soit légèrement inférieur, oui, inférieur à la moyenne nationale. Perdus dans un monde où les coutumes, les moeurs, et souvent la langue, leur sont étrangères, trop peu reçoivent une formation, une instruction, une initiation à notre langage, sauf pour les chanceux qui bénéficient dune aide bénévole et bien insuffisante encore.

Les travailleurs immigrés sont, dit-on, nécessaires à l'économie, à la prospérité de la nation. Alors, traitons-les humainement, non comme des bêtes de somme. Ou bien arrêtons cette nouvelle traite et acceptons une diminution de notre niveau de vie. Car la façons dont nous agissons à leur égard paraîtra, dans quelques décennies, et peut-être avant, non seulement incompréhensible, mais probablement d'une sottise et d'un égoïsme monstrueux..

Pierre VIANSSON-PONTE

Des jours entre les jours.

Epreuve de mathématique
Durée 3 heures

Les calculatrices sont autorisées.

Le problème porte sur l'étude des séries factorielles, séries de fonctions de la forme

$$\sum_{n \geq 0} a_n \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

Les parties I et II traitent d'un exemple. Les parties III, IV et V, indépendantes des deux premières, ont pour objet l'étude de propriétés de la somme d'une série factorielle convergente sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie I -

I.A - Pour tout entier p naturel non nul, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u(n, p) = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}$$

I.A.1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u(n, p)$ est convergente.

I.A.2) On pose :

$$\sigma(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} u(n, p)$$

Calculer $\sigma(1)$.

I.A.3) Pour $p \geq 2$, et pour n quelconque dans $\mathbb{N}^*$, exprimer $u(n, p-1) - u(n+1, p-1)$ en fonction de p et $u(n, p)$.

I.A.4) En déduire la valeur de $\sigma(p)$ en fonction de p, pour $p \geq 2$.

I.B - Soient q un entier ≥ 2 et N un entier naturel ≥ 1.
Donner une majoration du reste

$$R(N, q) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^q}$$

en le comparant à une intégrale.

Partie II -

II.A -

II.A.1) Montrer par récurrence l'existence de trois suites (a_p), (b_p) et (c_p) d'entiers naturels définies pour $p \geq 2$ telles que, pour tout réel x strictement positif et pour tout entier p on ait :

$$\frac{1}{x^3} = \sum_{k=2}^{p} \frac{a_k}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)(x+2)\dots(x+p)}$$

II.A.2) Exprimer a_{p+1}, b_{p+1} et c_{p+1} à l'aide de p, b_p et c_p.

II.A.3) Montrer que : $\forall p \geq 2,\ b_p \geq c_p \geq 0$.

II.A.4) Calculer a_p, b_p, c_p pour $p = 2, 3$ et 4.

II.B - On désire calculer une valeur décimale approchée de

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

avec une erreur inférieure ou égale à $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$.

III.E - Soit a un élément de $\mathscr{A}$.

III.E.1) Montrer que, pour tout entier n la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0, \ |u'_n(x)| \le u_n(x)\left(\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right)\right)$$

III.E.2) En déduire que la fonction f_a est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

N.B. On dira alors que la fonction f_a est développable en série factorielle (sous-entendu ici sur $]0, +\infty[$ et en abrégé DSFA) et on admettra qu'un tel développement est unique.

Partie IV

IV.A -

IV.A.1) Soit n un entier naturel. On pose :

$$\forall k = 0 \ldots n, \ P_k = \prod_{i=0, i \ne k}^{n} (X + i).$$

Montrer que les polynômes P_k forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.

IV.A.2) En déduire qu'il existe des rationnels indépendants de x notés $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ tels que :

$$\forall x > 0, \ \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{x+k}.$$

Exprimer α_k en fonction de k et n.

IV.B - Montrer, pour $x > 0$ et k entier naturel, l'existence de l'intégrale :

$$\int_0^1 (1-y)^{x-1+k} dy$$

et calculer sa valeur en fonction de k et x.

IV.C - Montrer que :

$$\forall x > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n dy = \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

En déduire que, pour tout élément a de $\mathscr{A}$, on a :

$$\forall x > 0, \ f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n dy.$$

IV.D - Soit a un élément de $\mathscr{A}$.

IV.D.1) Montrer que la série entière $\sum_{n \ge 0} a_n y^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

On note ϕ_a la fonction définie sur $[0, 1[$ par :

$$\phi_a(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n.$$

IV.D.2) Montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^1 (1-y)^{x-1} \phi_a(y) dy$ est définie sur $]0, +\infty[$, DSFA sur ce même intervalle et égale à f_a.

II.B.1) En utilisant I.B, déterminer un entier naturel N suffisant pour que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \text{ soit inférieur à } \varepsilon .$$

II.B.2) Donner un majorant simple de :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\dots(n+4)}$$

et montrer, à l'aide de tout ce qui précède, comment calculer $\zeta(3)$ pour la même valeur de ε avec une valeur de N moins grande que celle trouvée à la question II.B.1.

II.B.3) Donner une valeur décimale approchée à ε près (par défaut) de $\zeta(3)$ en utilisant ce qui précède.

Partie III -

III.A -

III.A.1) Pour tout entier naturel n et pour tout réel x strictement positif, on pose :

$$u_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)},\ v_n(x) = \frac{1}{(n+1)^x},\ w_n(x) = \frac{u_n(x)}{v_n(x)}.$$

Montrer que la série de terme général

$$\ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right), \text{ définie pour } n \geq 1, \text{ est convergente.}$$

III.A.2) En déduire qu'il existe $l(x)$ (dépendant de x et strictement positif) tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n(x)}{v_n(x)} = l(x).$$

III.B - Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de complexes et x un réel strictement positif. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n u_n(x)$ est absolument convergente (en abrégé AC) si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} a_n v_n(x)$ est AC.

III.C - On désigne désormais par $\mathscr{A}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n \geq 0}$ indexées par $\mathbb{N}$ telles que la série $\sum_{n \geq 0} a_n u_n(x)$ soit AC pour tout réel x strictement positif.

Soit $a = (a_n)_{n \geq 0}$ un élément de $\mathscr{A}$, montrer que :

III.C.1) la fonction f_a définie par :

$$x \mapsto f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(x)$$

est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

III.C.2) la fonction f_a tend vers 0 en $+\infty$.

III.D -

III.D.1) Donner un exemple d'un élément a de $\mathscr{A}$ avec a_n non nul pour tout entier n.

III.D.2) Donner un exemple d'une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ qui ne soit pas un élément de $\mathscr{A}$.

Epreuve de Mathématiques

Durée 4 heures

Préambule
Le sujet comporte deux problèmes indépendants.
Il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé .
Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'ils ne les ont pas démontrés , à condition de le mentionner explicitement .
Les résultats devront être soulignés ou encadrés .
Pour chaque question de ces problèmes , on appellera * *solution convenable* * toute suite finie d'affirmations correctement justifiées , et très lisiblement écrites . Seules les * *solutions convenables* * seront notées positivement .
Il sera tenu le plus grand compte dans la notation de la qualité de la rédaction et de la présentation matérielle .

Premier problème

Partie I

Étude de la fonction $J = J_0$ de Bessel. Développement en série entière

1°. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $J(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \cos\left(x.\sin(\theta)\right) d\theta$.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$J(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\left(x.\sin(\theta)\right) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(x.\sin(\theta)\right) d\theta.$$

(b) Montrer que la fonction $J \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ainsi définie est continue, paire et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

(c) Justifier que J est bornée sur $\mathbb{R}$.

(d) Justifier l'encadrement :

$$\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \qquad \frac{2\theta}{\pi} \leqslant \sin(\theta) \leqslant \theta.$$

En déduire un encadrement de $J(x)$ pour $x \in]0, 2]$.

(e) Préciser les valeurs de $J(0)$, $J'(0)$. Montrer que J est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

2°. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(\theta)\, d\theta$.

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad (2n+1)\, I_n = 2(n+1)\, I_{n+1}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad I_n = \dfrac{(2n)!\pi}{(n!)^2 2^{2n+1}}$.

EPREUVES 2003

Deuxième problème

Notations

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Pour p entier supérieur ou égal à 1, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et p colonnes et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices à coefficients complexes ayant n lignes et p colonnes. On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$, que l'on supposera muni de son produit scalaire canonique noté $(\cdot|\cdot)$.

Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ sont notés plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et sont munis de leur structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité.

Pour A appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A : c'est un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$. $0_{n,p}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n représenté par la matrice A dans une base donnée, on note $\mathrm{Sp}(f)$ ou $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de f, χ_f ou χ_A son polynôme caractéristique et $\mathrm{Tr}(f)$ ou $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace. En outre, si A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A, lorsque A est considérée comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\mathbb{R}[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, $\mathbb{C}[X]$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes et $\mathbb{N}_n$ est l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Partie I

I.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et M la matrice de $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$ donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix}$$

a) Si A est non inversible, montrer sans recourir au déterminant, que M est non inversible.

b) Si A est inversible, on pose $P = \begin{pmatrix} A & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & I_p \end{pmatrix}$. Résoudre alors dans $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$ l'équation matricielle $XP = M$.

c) Retrouver le résultat connu : $\det M = \det A \cdot \det C$.

Dans toute la suite u désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

I.2 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par u. Si v désigne l'endomorphisme induit par u sur F, montrer que χ_v divise χ_u.

I.3 Pour tout x élément de $\mathbb{R}^n$, on définit l'ensemble $F_u(x)$ par :

$$F_u(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, P \in \mathbb{R}[X]\,,\ y = P(u)(x)\}$$

Montrer que $F_u(x)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par u.

I.4 Dans cette question, on suppose que x est un élément non nul de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer l'existence d'un plus petit entier naturel q pour lequel la famille de vecteurs $(x, u(x), \dots, u^q(x))$ est liée.

b) Soit $(a_0, a_1, \dots, a_q)$ une famille de nombres réels non tous nuls telle que $\sum_{j=0}^{q} a_j u^j(x) = 0$ et S le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $S(X) = \sum_{j=0}^{q} a_j X^j$. Montrer que a_q est non nul, puis que $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est une base de $F_u(x)$.

c) Pour tout $i \in \{0, 1, \dots, q\}$, on pose $\alpha_i = \dfrac{a_i}{a_q}$ et on note u_0 l'endomorphisme induit par u sur $F_u(x)$. Montrer que $\chi_{u_0}(X) = (-1)^q \sum_{i=0}^{q} \alpha_i X^i$, donner la valeur de $\chi_{u_0}(u)(x)$ et en déduire que le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u.

3°. (a) Rappeler le développement en série entière de la fonction cos et son rayon de convergence. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $x \mapsto \cos\big(x.\sin(\theta)\big)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et préciser ce développement.

(b) En déduire que J est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

(on précisera le théorème du cours utilisé pour l'intégration terme à terme).

Partie II

Étude d'une équation différentielle

4°. Vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x\big(J(x) + J''(x)\big) + J'(x) = 0.$$

5°. Montrer que l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$, est un espace vectoriel réel de dimension 1, engendré par J.

6°. Soit $K \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$.

Pour tout $x > 0$ on pose : $W(x) = J'(x)K(x) - J(x)K'(x)$.

Montrer que $W \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, et est telle que pour tout $x > 0$, on ait : $W'(x) = -\dfrac{1}{x} W(x)$.

En déduire la forme de W.

7°. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{H_{n+1}}{H_n}\right) = 1$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

Vérifier que le rayon de convergence de cette série entière est bien égal à $+\infty$. Pour tout réel x, expliciter (sous forme d'une série entière simple) la valeur de l'expression $x\varphi''(x) + \varphi'(x) + x\varphi(x)$ et la comparer avec $-2\,J'(x)$.

(c) Pour tout $x > 0$, on pose : $K(x) = \ln(x)\,J(x) + \varphi(x)$.

Vérifier que K est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$, et expliciter la fonction W associée définie au 6°.

Que peut-on en déduire ?

L'épreuve comporte deux parties indépendantes:

PREMIERE PARTIE: ELECTROMAGNETISME.

L'espace est rapporté à un trièdre rectangle direct Oxyz et on désigne par $\vec{i}$, $\vec{j}$ et respectivement les vecteurs unitaires des axes.

On rappelle que :

$$\vec{rot}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\vec{rot}\,(\vec{rot}\,\vec{A}) = \vec{grad}\,(\mathrm{div}\vec{A}) - \vec{\Delta A}.$$

L'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ admet comme solution générale :

$$f_1(t - \frac{z}{c}) + f_2(t + \frac{z}{c}).$$

1) Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide

On se place dans le vide, en l'absence de charges et courants.

1-1) En partant des équations de Maxwell, établir les équations vectorielles reliant $\Delta\vec{E}$ à $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ et $\Delta\vec{B}$ à $\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$.

1-2) On suppose que les champs cherchés ne dépendent que de la coordonnée spatia z (les dérivés partielles des champs par rapport à x et y sont nulles). C'e l'hypothèse d'onde plane.

Écrire les équations aux dérivées partielles auxquelles obéissent les composant du champ électrique.

Pour chaque composante, la solution de cette équation est la somme de deux term A quoi correspondent-ils ?

1-3) On considère un de ces deux termes. Montrer que l'onde correspondante e transversale et exprimer sa vitesse de propagation, notée c en fonction de ε_0 et μ respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vi

On admettra pour la suite et ce, sans démonstration, que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogona et que le trièdre ($\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{c}$) est direct et que $\vec{E} = \vec{B} \wedge \vec{c}$ ($\vec{c}$ est le vecteur vitesse l'onde : $\vec{c} = c\,\vec{k}$ ou $\vec{c} = -c\,\vec{k}$ suivant le sens de propagation).

1-4) On suppose : $\vec{E} = E_1 \cos\left\{\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right\}\vec{i}$.

Déterminer l'expression du champ magnétique d'amplitude B_1. Préciser le rapport $\frac{E}{B}$

Partie II

II.1 Vérifier les propriétés suivantes :

a) $\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(AX \mid Y) = (X \mid {}^tAY)$

b) $\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $\mathrm{Tr}(X{}^tY) = (X \mid Y)$

c) $\forall (X, Y, Z) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^3$, $(X{}^tY)Z = (Y \mid Z)X$

II.2 Soit φ : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(A, B) \to \mathrm{Tr}({}^tAB)$. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans toute la suite ce produit scalaire sera noté $((\cdot \mid \cdot))$.

II.3 A partir de cette question, r, s, l, m désignent des entiers naturels inférieurs ou égaux à n.

a) Evaluer le produit par blocs $\begin{pmatrix} I_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \end{pmatrix}$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang r. Montrer qu'il existe B dans $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et C dans $\mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ telles que $A = BC$.

c) Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement s'il existe deux matrices non nulles X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = X{}^tY$.

d) Montrer que la décomposition $A = X{}^tY$ de la question précédente n'est pas unique et déterminer les relations vérifiées par des matrices colonnes X, Y, Z, T telles que

$$A = X{}^tY = Z{}^tT$$

II.4 a) Soit $(Z_i)_{1\leq i\leq r}$ et $(T_j)_{1\leq j\leq s}$ deux familles libres de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la famille de matrices $(Z_i{}^tT_j)_{\substack{1\leq i\leq r \\ 1\leq j\leq s}}$ est de rang égal à rs.

b) Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(Y_j)_{1\leq j\leq n}$ deux bases de $\mathbb{R}^n$. Que peut-on dire de la famille de matrices $(X_i{}^tY_j)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$?

c) Soit $(V_i)_{1\leq i\leq l}$ et $(W_j)_{1\leq j\leq m}$ deux familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de rangs respectifs r et s. Déterminer le rang de la famille de matrices $(V_i{}^tW_j)_{\substack{1\leq i\leq l \\ 1\leq j\leq m}}$.

II.5 Montrer que si les bases $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(Y_j)_{1\leq j\leq n}$ sont des bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$, la famille $(X_i{}^tY_j)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini en II.2. La réciproque est-elle vraie ?

II.6 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

a) Montrer que $A^2 = (\mathrm{Tr}\, A)A$.

b) Soit X et Y deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = X{}^tY$. Montrer l'équivalence des quatre propositions suivantes :

i) $(X|Y) = 0$.

ii) $\mathrm{Tr} A = 0$.

iii) $\mathrm{Im}\, A \subset \mathrm{Ker}\, A$.

iv) A est non diagonalisable.

II.7 Montrer que les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisables et de rang 1 engendrent $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

::::::::::::FIN ::::::::::::

La distance entre les plans est donnée par : $d = \frac{n\lambda}{2}$ avec n entier et λ longueur d'onde de l'onde de pulsation ω. On se place dans l'approximation des ondes planes. On admet qu'un système d'ondes stationnaires existe dans le volume délimité par les deux plaques. On raisonne sur un volume cylindrique d'axe z, délimité par les deux plans et de section unité.

3-1) Exprimer la densité d'énergie électrique, W_e et la densité d'énergie magnétique W_m du champ électromagnétique en fonction de z. On prendra pour expressions de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ celles obtenues à la question 2.3.

3-2) En intégrant ces grandeurs sur le volume défini ci-dessus, exprimer l'énergie électromagnétique totale en fonction de d, E_1 et ε_0. Montrer qu'elle est constante.

3-3) Montrer qu'il y a échange permanent entre énergie électrique et énergie magnétique.

DEUXIEME PARTIE: MECANIQUE

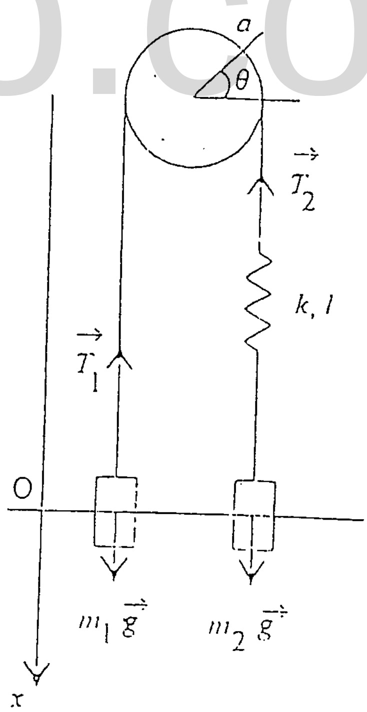
Dans tout le problème, les solides sont plongés dans le champ de pesanteur uniforme d'intensité g. Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen, et associé à un repère R, (O, x, y, z), tel que l'axe Ox soit dirigé suivant la verticale descendante.

On considère le dispositif constitué de deux masses m_1 et m_2, suspendues par un fil inextensible. La masse m_2 est accrochée au fil par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k, dont la longueur l au repos est l_0. La masse du ressort, ainsi que celle du fil sont négligeables.

Le fil est placé sur une poulie de masse égale à $2M$, et de rayon a. Elle a la forme d'un disque d'épaisseur $2e$. La poulie est mobile sans frottement autour de son axe. Le fil ne glisse pas sur la poulie. T_1 et T_2 désignent les modules des tensions du fil de part et d'autre de la poulie.

On appelle x_1 l'abscisse de la masse m_1. On appelle x_2, l'abscisse de la masse m_2. L'allongement du ressort est égal à L, positif ou négatif. Le mouvement de la poulie est repéré par l'angle θ.

On se référera au schéma de la figure n°3.



au repos et: $\vec{P} + \vec{T_1} = \vec{0}$

$m_1 g \vec{e}_x - T_1 \vec{e}_x = m$

Figure n°3

2) Réflexion d'une onde plane sur un plan parfaitement conducteur

Une onde électromagnétique progressive plane se propage dans le vide vers un plan métallique parfaitement conducteur et normal à la direction de propagation qui se fait selon la direction Oz dans le sens de $\vec{k}$. Le métal est situé dans la région des $z>0$. La géométrie du système est donnée ci-dessous.

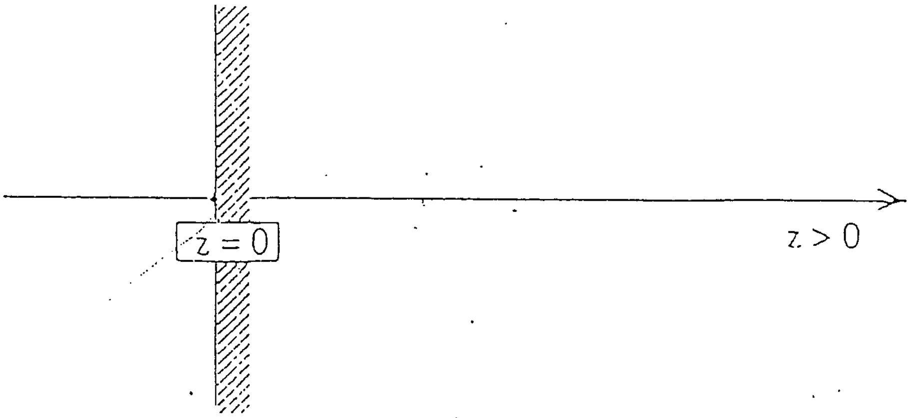


Fig. 1

On suppose une onde incidente $\vec{E} = E_1 \cos\left\{\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right\} \vec{i}$. On admet que le champ électrique est nul à l'intérieur du métal et que le champ magnétique n'y possède pas de composante variable dans le temps.

2-1) Montrer, sur la base des équations de continuité du champ électrique, qu'une onde réfléchie prend naissance à la surface du conducteur.

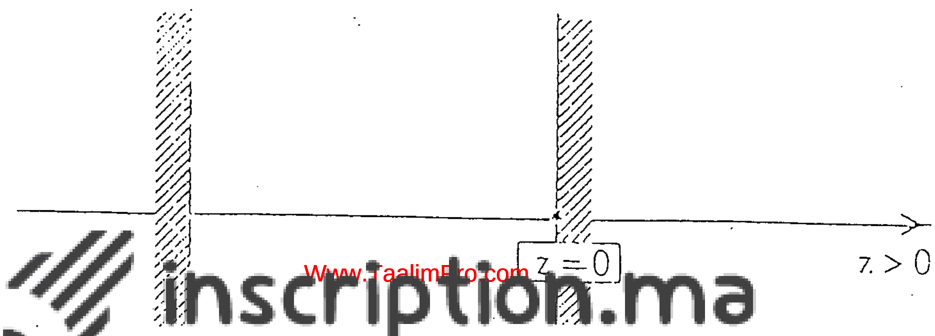
2-2) Exprimer les vecteurs $\vec{E_2}$ et $\vec{B_2}$ de cette onde réfléchie en fonction de E_1, ω, t, z, c, $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

2-3) Exprimer les champs totaux $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en un point de coordonnée $z<0$ où coexistent onde incidente et onde réfléchie.

2-4) Quel type d'onde obtient-on? Représenter $E(z)$.

3) Oscillateur électromagnétique

On crée un oscillateur en disposant dans le vide deux plans parallèles parfaitement conducteurs selon la géométrie ci-dessous (Fig. 2).



EPREUVE DE FRANCAIS

Pour les médias, les années 80 ont été celles de tous les bouleversements : l'ascension, partout en Europe, des radios et des télévisions privées; l'interrogation, dans les mêmes pays, sur la raison d'être des diffuseurs publics; l'émergence, aux Etats-Unis d'abord, sur le Vieux Continent ensuite, de radios et de télévisions nouvelles, non plus généralistes mais spécialisées, par les thèmes abordés ou les audiences visées, non plus nationales par leur aire de diffusion, mais locales, régionales ou transcontinentales, voire planétaires, et parfois payantes c'est-à-dire financées directement par les télé-spectateurs.

De son côté, la presse imprimée, immuable et changeante, a poursuivi sa progression, dans la voie inaugurée dans les années 50: elle a joué la carte de la spécialisation, ouvrant de nouvelles rubriques ou créant des titres nouveaux pour les minorités et pour les préoccupations jusque-là délaissées; simultanément, elle a informatisé toujours davantage ses équipements, depuis la fabrication jusqu'à la rédaction, sans oublier la distribution. D'où le pressentiment d'un retour en grâce, au tournant des années 90, conséquence inespérée d'une rénovation tranquille.

Enfin, entre 1980 et 1990, des médias nouveaux ont connu, après d'inévitables aléas, les débuts prometteurs d'une destinée glorieuse: le magnétoscope et la vidéocassette; le câble, avec son service de base, ses chaînes supplémentaires, ses programmes à la carte; le minitel et la téléinformatique, professionnelle ou domestique; la télévision directe par satellite; le vidéodisque interactif...

Depuis mars 19881, deux traits principaux apparaissent au grand jour, qui marquent profondément l'évolution des médias et de la communication D'un côté, il s'agit du progrès accéléré des techniques : leurs prouesses concernent aussi bien l'enregistrement que la transmission ou la réception des signaux, quelle que soit, du reste, la forme ou la finalité des messages dont ils sont les vecteurs. Devant de telles performances, comment empêcher les uns et les autres, ingénieurs ou philosophes, experts ou hommes de la rue, d'annoncer l'avènement de la communication universelle, le jour où n'importe qui pourra enfin accéder de n'importe où et n'importe quand, à n'importe qui ou à n'importe quoi?

D'un autre côté, les années 80 ont été marquées, de façon toujours plus significative, par l'ouverture accrue de la plupart des pays à l'économie mondiale. La progression du commerce international, en effet, concerne les médias au premier chef, considérés comme des biens ou des services, au même titre, d'ailleurs, que les capitaux et les personnes qu'ils sont capables de mobiliser. Comment ne pas soupçonner ces techniques d'oeuvrer plus efficacement que jamais à la propagation, à l'échelle planétaire, des mêmes modes de vie et des mêmes modes de pensée? Et de contribuer, du même coup, irrésistiblement, à l'accomplissement de cette "fin de l'histoire" où la vie internationale, selon Francis Fukuyama, sera beaucoup plus affaire d'économie que de politique ou de stratégie ?

Pourquoi cette double évolution de la technique et de l'économie ne se poursuivrait-elle pas demain, redoublant parfois ses effets? Il y a une fatalité de la technique, funeste ou providentielle : les hommes adoptent tôt ou tard les outils qu'ils ont inventés, même si leurs mérites paraissent limités.

En ce début 1990, la télévision par câble démarre enfin, en France, après avoir franchi le seuil fatidique des 300 000 abonnés, avec quelques années de retard sur l'Allemagne, tandis que notre voisin découvre après nous les vertus du minitel. Les satellites de la deuxième génération - dont le premier exemplaire a été lancé en Octobre 1989 -seront placés sur orbite en même temps pour les Etats-Unis, l'Europe et le Japon : ils serviront au téléphone, à la télévision et à la téléinformatique. Seuls varient, selon les pays l'ordre d'arrivée des techniques, la rapidité et les modalités de leur adoption. Mais la leçon du passé fait figure de loi : dans l'univers des médias, le nouveau ne remplace pas l'ancien, il lui ouvre souvent une nouvelle carrière. Entre l'écrit et l'audiovisuel, entre le cinéma et la télévision, entre la vidéo et le câble, entre la télévision par voie terrestre et celle des satellites et des câbles, on ne parle plus, désormais d'éliminations, mais bien d'alliances, de superpositions et de complémentarité.

1) ÉQUATIONS DU MOUVEMENT.

1-1) Quel est le moment d'inertie de la poulie ?

1-2) Écrire la relation fondamentale de la dynamique pour les masses m_1 et m_2.

1-3) Écrire le théorème du moment cinétique, appliqué à la poulie, en son centre d'inertie.

1-4) Écrire les relations reliant x_1, x_2, L et θ.

1-5) Exprimer les équations différentielles vérifiées par les accélérations γ_1 et γ_2, des masses m_1 et m_2.

2) ÉTUDE D'UNE SOLUTION PARTICULIÈRE.

À l'instant initial, on suppose que les paramètres vérifient les relations suivantes :

$$x_1 = x_2 = L = 0 \quad ; \quad v_1 = v_2 = 0.$$

2-1) Quelle est l'accélération γ_2 de la masse m_2 à l'instant initial ?

2-2) Quelle est la pulsation ω des oscillations du système ?

2-3) Déterminer l'expression de l'accélération γ_2 à l'instant t, en fonction de deux constantes d'intégration.

2-4) Intégrer le système différentiel obtenu en ~~IV~~.5. Déterminer les constantes d'intégration en fonction des conditions initiales du problème. On Exprimera x_1, x_2 et L, en fonction des paramètres m_1, m_2, M, k, g, ω et t.

2-5) Exprimer la valeur de l'angle θ en fonction du temps. Calculer l'allongement maximal du ressort.

2-6) Déterminer l'accélération γ_1 de la masse m_1 à l'instant initial ? Commenter le résultat obtenu.

2-7) Déterminer les tensions du fil de part et d'autre de la poulie.

2-8) Montrer que l'accélération γ_1 reste toujours inférieure à g.

2-9) Exprimer la loi de conservation de l'énergie du système à l'aide des paramètres x_1, x_2, L, v_1 et v_2.

EPREUVES 2004

Conseils pratiques

- Résumer suppose une grande fidélité au texte.
- N'ajoutez ni ne retrancher rien
- Eviter toute formule du genre "l'auteur dit que".
- Respecter l'ordre et la logique du texte.
- Ne reprenez pas les mots et encore moins des parties de phrases, du texte.

1- Résume

Ce texte de Francis Balle comporte 978 mots. Vous êtes priés de le résumer au 1/5è de sa longueur, une marge de 10% en plus ou en moins étant admise. Indiquez à la fin de votre résumé le nombre de mots que vous aurez utilisés.

2- Donnez un titre à ce texte

3-Vocabulaire

Vous donnerez le sens dans le texte des mots suivants : émergence - aléas - prouesses.

4- Questions

- Quelle a été l'évolution technique dans le secteur des médias dans le monde, des années 90 à nos jours ?

- Pensez vous que la télévision a un rôle à jouer dans l'éducation de la jeunesse au Maroc ? De quelle manière ?

ROYAUME DU MAROC

Ecole Hassania des Travaux Publics

Concours d'Accès en 1ère Année

Réservé aux Titulaires du CUES ou DEUG (option MP)

- Epreuve de Mathématiques
- Durée : 4h

Lundi 5 Juillet 2004

5. (a) Montrer que Φ_α est un endomorphisme injectif de E.

   (b) Soit f un élément de E et $g = \Phi_\alpha(f)$. Montrer que g est dérivable en tout point $x > 0$ en exprimant $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $g(x)$.

   (c) Déterminer les valeurs propres de Φ_α. en précisant les différents sous-espaces propres (on pourra former une équation différentielle vérifiée par f fonction propre associée à une valeur propre).

   (d) Montrer que Φ_α n'est pas surjective

6. Soit f un élément de E et $g = \Phi_\alpha(f)$. On suppose qu'il existe $R > 0$ et une suite réelle $(a_n)_n$ tels que pour tout $x \in [0, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer qu'il existe une suite réelle $(b_n)_n$ (que l'on explicitera) telle que pour tout $x \in [0, R[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

---

7. Dans cette question seulement, on pose $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$ et on pose $g = \Phi_\alpha(f)$.

   (a) En prenant $R = 1$, expliciter les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ correspondantes à la situation de la question 6.

   (b) Montrer que g est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $xy' + \alpha y = \dfrac{1}{1+x}$, g étant la seule solution à avoir une limite finie en 0.

   (c) Montrer que g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et préciser sa limite en $+\infty$. (On pourra distinguer les cas $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$ en cherchant à majorer simplement $g(x)$ pour $x > 0$)

   (d) Déterminer une relation entre $\Phi_\alpha(f)$ et $\Phi_{\alpha+1}(f)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} x\Phi_{\alpha+1}(f)(x)$.

8. Dans cette question seulement, on suppose $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $f(t) = e^{-t}$ et on note $g = \Phi_\alpha(f)$. Exprimer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha g(x)$ en utilisant une factorielle et en déduire un équivalent simple de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

9. Soient $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$

   (a) Soit f dans E. Grâce à une intégration par parties que l'on précisera, montrer que :

$$(\alpha - \beta)\Phi_\alpha(\Phi_\beta(f)) = \Phi_\beta(f) - \Phi_\alpha(f)$$

   (b) En déduire que les endomorphismes Φ_α et Φ_β commutent.

10. Soit un entier naturel n. On désigne par $\mathcal{P}_n$ le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à n.

   (a) Montrer que si f est dans $\mathcal{P}_n$, alors $g = \Phi_\alpha(f)$ l'est aussi.

   (b) Vérifier que la restriction de Φ_α à $\mathcal{P}_n$ est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{P}_n$.

   (c) On suppose $n = 2$. Déterminer le nombre d'endomorphismes θ de $\mathcal{P}_2$ tels que $\theta^2 = \Phi_\alpha$.

11. Soit f un élément de E et $g = \Phi_\alpha(f)$. On suppose que f tend vers le réel L en $+\infty$. Montrer que g admet une limite réelle en $+\infty$ que l'on calculera en fonction de L.

Tournez la page S.V.P.

Epreuve de Mathématiques

Durée 4 heures

Préambule

Le sujet comporte deux problèmes indépendants.

Il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé .

Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'ils ne les ont pas démontrés , à condition de le mentionner explicitement .

Les résultats devront être soulignés ou encadrés .

Pour chaque question de ces problèmes , on appellera * *solution convenable* * toute suite finie d'affirmations correctement justifiées , et très lisiblement écrites . Seules les * *solutions convenables* * seront notées positivement .

Il sera tenu le plus grand compte dans la notation de la qualité de la rédaction et de la présentation matérielle .

Premier problème

Partie I :un exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\text{Arctan}x$ et pour $x > 0$, on pose $g(x) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t^2 \text{Arctan}t\, dt$.

1. Etudier la fonction f et tracer son graphe (en précisant les éventuelles asymptotes et la position du graphe de f par rapport à celles-ci).

2. Calculer $g(x)$ pour $x \neq 0$ et montrer que g peut être prolongée par continuité en 0. (On continue à appeler g la fonction ainsi prolongée).
Vérifier que g est développable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ que l'on précisera et donner ce développement. Prouver que g est indéfiniment dérivable (c'est à dire de classe C^∞) sur $\mathbb{R}$.

3. Etudier la fonction g et tracer son graphe (en précisant les éventuelles asymptotes et la position du graphe de g par rapport à celles-ci).

Partie II

Dans toute la suite du problème, on désigne par $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ et par α un réel tel que $\alpha > 0$.
Pour tout f de E, on désigne par $\Phi_\alpha(f)$ l'application g de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(0) = \frac{f(0)}{\alpha} \quad \text{et pour } x > 0 \quad g(x) = \frac{1}{x^\alpha}\int_0^x t^{\alpha-1} f(t)\, dt$$

4. (a) Vérifier que pour tout élément f de E, $g = \Phi_\alpha(f)$ est élément de E.

   (b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $\Phi_\alpha(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 u^{\alpha-1} f(xu)\, du$.

   (c) On suppose f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et on pose $g = \Phi_\alpha(f)$. Montrer que g est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et calculer g' en fonction de $\Phi_{\alpha+1}(f')$.
   Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ si f l'est.

Tournez la page S.V.P.

b) Donner la matrice de σ dans la base canonique $\{e_0, e_2, e_4\}$ de E_2.

c) Déterminer le noyau de σ, ainsi que ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

d) σ est-il diagonalisable ?

3° a) Montrer que l'application s qui à tout polynôme $P \in E_2$ associe le polynôme $s(P)$ défini par

$$s(P)(X) = (X^2 - 1)\, P''(X) + X\, P'(X) \tag{2}$$

définit un endomorphisme de E_2.

b) Donner la matrice de s dans la base canonique $\{e_0, e_2, e_4\}$ de E_2.

c) Déterminer le noyau de s, ainsi que ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

d) s est-il diagonalisable ?

4° On considère l'application qui à tout polynôme $P \in E$ associe le polynôme $2X\,P(X) - P'(X)$.

a) Montrer que la restriction f de cette application au sous-espace E_2 définit une application linéaire de E_2 dans E_1.

b) Déterminer la matrice de cette application dans les bases canoniques respectives de E_2 et E_1.

c) Montrer que f est un isomorphisme.

Partie B

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ non nécessairement de dimension finie. On désigne par E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, de sorte que $E = E_1 \oplus E_2$. On désigne par s un endomorphisme de E_2 et par f une application linéaire bijective de E_2 dans E_1.
À $x \in E$ s'écrivant $x = x_1 + x_2$, où $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, on associe

$$F(x) = f^{-1}(x_1) + f(x_2) + s(x_2). \tag{3}$$

1° a) Prouver que F est injective.

b) Prouver que F est surjective (on ne suppose PAS que E est de dimension finie) et exprimer $F^{-1}(y)$, où $y = y_1 + y_2 \in E$ et $(y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$.

2° a) On suppose que F admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé, décomposé en $x = x_1 + x_2$ (où $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$). Prouver que x_1 et x_2 sont non nuls et que x_2 est vecteur propre de s.

b) Réciproquement, on suppose que s admet une valeur propre réelle μ. Prouver que F admet au moins une valeur propre réelle λ. Déterminer un vecteur propre de F associé à λ en fonction d'un vecteur propre x_2 de s associé à μ.

c) Montrer que si $u_1, \ldots, u_k$ sont des vecteurs propres de s indépendants et associés à une même valeur propre μ de s, alors les vecteurs propres de F précédemment calculés sont indépendants.

On suppose désormais E de dimension finie, et on pose $n = \dim E_1$.

3° a) Justifier que $\dim E_1 = \dim E_2 = n$ et $\dim E = 2n$.

b) Soit $\mu_1, \ldots, \mu_p$ les valeurs propres réelles distinctes de s. Prouver que F admet $2p$ valeurs propres réelles distinctes.

c) Montrer que si s est diagonalisable, F l'est aussi.

::::::::::::FIN ::::::::::::::

15

Partie III

Dans cette partie, $\alpha = 1$ et l'on notera simplement $\Phi = \Phi_1$; c'est à dire si f est élément de E, $g = \Phi(f)$ est définie par $g(0) = f(0)$ et $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

12. Soit f dans E et $g = \Phi(f)$. Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors g admet une limite réelle en $+\infty$ que l'on précisera. La réciproque est-elle vraie ?

13. (a) Soit f dans E et $g = \Phi(f)$ et T un réel strictement positif. On suppose que f admet pour période T. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} g$ en fonction de $\int_0^T f(t)dt$. (on poura commencer par calculer $g(nT)$ avec n entier naturel non nul).

    (b) Déterminer en fonction de x un équivalent simple de $\int_0^x |\sin t|dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

14. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ telles que f^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

    (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel réel et que l'application :

    $$\mathcal{N} : f \to \sqrt{\int_0^{+\infty} (f(x))^2\,dx}$$

    est une norme sur $\mathcal{E}$.

    (b) Soit $f \in \mathcal{E}$ et $g = \Phi(f)$. Grâce à une intégration par parties, justifier que pour tous ε, A, tels que $0 < \varepsilon < A$, on a :

    $$\int_\varepsilon^A (g(x))^2\,dx \leq \frac{1}{\varepsilon}(\int_0^\varepsilon f(t)\,dt)^2 + 2|\int_\varepsilon^A g(t)f(t)dt\,|$$

    (c) En déduire que pour tout f de $\mathcal{E}$, $\Phi(f)$ est aussi élément de $\mathcal{E}$ avec $\mathcal{N}(\Phi(f)) \leq 2\mathcal{N}(f)$. Comment interprétez-vous ce résultat ?

$\boxed{\text{PROBLÈME - II}}$

Partie A

On considère $E = \mathbb{R}_5[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 5. On note E_1 l'ensemble des polynômes impairs de E et E_2 l'ensemble des polynômes pairs de E. On désigne par e_k ($0 \leqslant k \leqslant 5$) les éléments de la base canonique de E de sorte que $e_k(X) = X^k$. On nommera pareillement "base canonique" de E_1 (resp. de E_2) la base $\{e_1, e_3, e_5\}$ (resp. $\{e_0, e_2, e_4\}$) de E_1 (resp. E_2).

1° Justifier que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, c'est-à-dire $E = E_1 \oplus E_2$.

2° a) Montrer que l'application σ qui à tout polynôme $P \in E_2$ associe le polynôme $\sigma(P)$ défini par

$$\sigma(P)(X) = (X^2+1)\,P''(X) - X\,P'(X) \tag{1}$$

définit un endomorphisme de E_2.

Tournez la page S.V.P.

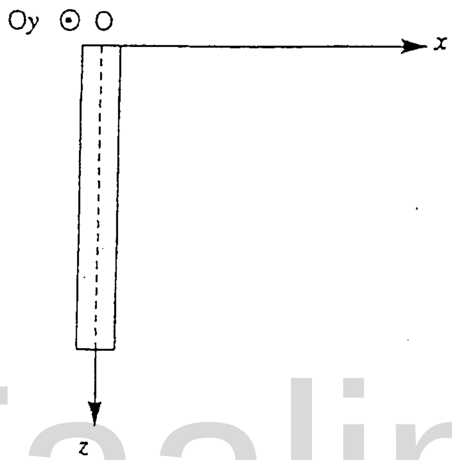
L'épreuve comporte deux parties indépendantes.
La plus grande importance sera donnée à la qualité de la présentation et à la précision de l'argumentation des réponses. Les résultats seront encadrés et accompagnés d'unités.

PREMIERE PARTIE : **Mécanique**

MOUVEMENTS D'UNE TIGE CYLINDRIQUE

I – Rotation autour d'un axe horizontal.

Figure 1



1) Soit une tige cylindrique homogène, de masse M, de longueur l, à section circulaire de faible rayon r.

On note $\mathcal{R}$ le référentiel galiléen (Ox, Oy, Oz), Oz étant un axe vertical descendant (figure 1)

On désigne par J_{0y} et J_{0z} les moments d'inertie de la tige par rapport aux axes Oy et Oz.

1-1) Exprimer J_{0z} puis J_{0y}.

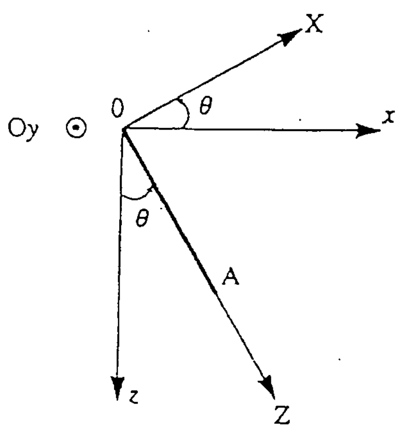
1-2) Quelle erreur ~~relative~~ ΔJ, commet-on en prenant pour J_{0y} la valeur approchée $J = Ml^2/3$ calculée dans le cas d'une tige à section circulaire quasi ponctuelle?

1-3) Calculer ΔJ et J_{0y} avec les données numériques suivantes :

$$l = 0,5 \text{ m}, \quad r = 0,01\text{m}, \quad M = 1 \text{ kg}.$$

Dans la suite du problème on prendra pour J_{0y} la valeur approchée J , la section circulaire étant considérée quasi ponctuelle.

Figure 2



2) La tige OA peut tourner sans frottement autour de l'axe horizontal Oy dans le plan xOz . Elle n'est soumise qu'à son poids et à l'action du support. La position de la tige est repérée par l'angle (Oz, OA) = $\theta(t)$ (figure 2). On lance la tige avec des conditions initiales :

$$\theta(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(0) = \omega_0.$$

2-1) En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle liant $\theta(t)$ et $\theta(t)$. On désigne par g l'accélération (uniforme) de la pesanteur.

2-2) Quelle est la relation entre θ et $\dot{\theta} = \omega$ à l'instant t ?

2-3) Pour quelle valeur limite $\omega_{0,l}$ de ω_0 la tige peut-elle effectuer un tour complet ?

2-4) On appelle $\bar{R}$ la résultante des actions exercées en O par l'axe de rotation (colinéaire à Oy) sur la tige OA.

ROYAUME DU MAROC

Ecole Hassania des Travaux Publics

Concours d'Accès en 1ère Année

Réservé aux Titulaires du CUES ou DEUG (option MP)

- Epreuve de Physique
- Durée : 3h

Mardi 06 Juillet 2004

$$H(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} .$$

1-2) Quelles valeurs numériques faut-il donner à L et à C afin d'obtenir un filtre pour lequel $Q = 200$ et $\omega_0 = 4.10^4$ rad.s^{-1}, lorsque $R = 10\ \Omega$?

1-3) Sachant que les valeurs de R, L et C ne sont connues qu'avec une précision relative de 5.10^{-3} (0,5 %), quelles sont les précisions relatives qui caractérisent les valeurs de Q et ω_0 ?

1-4) Evaluer numériquement $|H|$ pour $\omega = \omega_0 \times 1{,}05$ et pour $\omega = \frac{\omega_0}{1{,}05}$.

1-5) Représenter de façon approximative la courbe présentant $\log |H|$ en ordonnées et $\log \frac{\omega}{\omega_0}$ en abscisses.
On précisera essentiellement l'axe de symétrie et les points d'intersection des asymptotes avec les axes des abscisses et des ordonnées.

1-6) Décrire en une phrase le comportement de ce filtre en régime sinusoïdal.
A quelles conditions peut-on le considérer comme un montage intégrateur ?
A quelles conditions peut-on le considérer comme un montage dérivateur ?

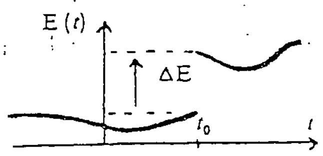
2. Régime impulsionnel.

2-1) Expliciter l'équation différentielle reliant S (t) à E (t) dans le cas général où E (t) n'est pas forcément une fonction sinusoïdale.

2-2) Dans le cas où E (t) est nulle, montrer que l'imprécision qui affecte ω_0 (question 1.c.) autorise l'écriture de la solution de l'équation précédente sous la forme :

$$S(t) \approx \left(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\right).\exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) .$$

2-3) On suppose que la tension d'entrée présente, à la date t_0 , une discontinuité : $E(t_0^+) - E(t_0^-) = \Delta E$ (voir figure 1).



(figure 1)

Montrer qu'alors :
2-3-1) le signal de sortie S (t) est continu à la date t_0 ;

2-3-2) La dérivée du signal de sortie présente une discontinuité égale à :

$$\frac{dS}{dt}(t_0^+) - \frac{dS}{dt}(t_0^-) = \frac{\omega_0}{Q}\Delta E .$$

Déterminer en fonction de θ les composantes R_X et R_Z de $\bar{R}$ sur la base « tournante » OX, OZ (figure 2).

2-5) On se place dans le cas où $\theta(t)$ reste petit, θ étant assimilé à un infiniment petit du premier ordre $\left(\text{par rapport à } \frac{\pi}{2}\right)$.

Les conditions initiales sont toujours $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = \omega_0$.

2-5-1) Établir l'équation différentielle du mouvement de la tige
2-5-2) Donner l'expression de $\theta(t)$.

2-5-3) Quelle est la condition sur ω_0 permettant d'obtenir ce type de mouvement ?

2-5-4) Calculer numériquement la période des petites oscillations ;

données numériques : $l = 0{,}5$ m, $M = 1$ kg, $g = 9{,}8$ m·s^{-2}.

2-5-5) On appelle le portrait de phase du mouvement de la tige le graphe $\dot{\theta}(t) = f(\theta(t))$.

Représenter le portrait de phase dans le cas où $\theta(t)$ est petit .

2-6) Dans cette question on tient compte des frottements qui sont modélisés par un couple de moment $\Gamma = -h\dot{\theta}(t)$ (frottement fluide)

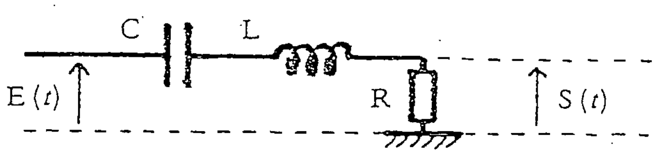
2-6-1) On se place dans le cas où $\theta(t)$ reste petit, établir l'équation différentielle du mouvement de la tige.

2-6-2) On écarte la tige d'un angle θ et on l'abandonne sans vitesse initiale, déterminer la condition sur h pour avoir des oscillations sinusoïdales amorties (mouvement pseudo périodique). Donner alors l'allure du portrait de phase du mouvement.

DEUXIEME PARTIE : <u>ELECTRICITE</u>

FILTRE RLC SÉRIE

Pour le filtre RLC dessiné ci-après, on note E (t) la tension imposée à l'entrée et S (t) la tension de sortie.



1. Régime sinusoïdal forcé.

1-1) Mettre la fonction de transfert sous la forme ci-après (en précisant les expressions de Q et ω_0 en fonction de R, L et C) :

Www.TaalimPro.com

ROYAUME DU MAROC

Ecole Hassania des Travaux Publics

Concours d'Accès en 1ère Année

Réservé aux Titulaires du CUES ou DEUG (option MP)

Epreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures

Jeudi 07 Juillet 2005

Epreuve de Mathématiques

durée 4 heures

Problème

On désigne par E_0 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ où a et b sont donnés avec $a < b$, muni de la norme :

$$\|f\| = \sup|f| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

On désigne par E_1 le sous–espace de E_0 des applications de classe C^1 sur $[a,b]$.

Pour tout $f \in E_0$ on désigne par $L(f)$ la primitive de f qui vérifie $\displaystyle\int_a^b L(f)(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Pour tout entier non nul n on pose $\quad L^n = L \circ L^{n-1} \quad$ où $\quad L^0 = \mathrm{id}\quad$ (application identique).

On désigne par (P_n) la suite de polynômes définis par $P_0 = 1$ et $P_n = L^n(P_0)$ où l'on désigne par le même symbole le polynôme et la restriction de sa fonction polynômiale associée à $[a,b]$.

Partie I

1°. (a) Montrer que L est bien défini et constitue un endomorphisme de E_0.

(b) Déterminer son noyau Ker L.

(c) Montrer que l'image de L est incluse dans E_1. La restriction à E_1 de cet endomorphisme L définit-elle un automorphisme de E_1 (justifier avec précision la réponse) ?

c) $\forall g \in \mathrm{Im}(L) \Rightarrow \exists f \in E_0,\ g = L(f) = \int_a^x f(t)\,dt$ ... $g(a) = 0$ g est dérivable et ~~Gxe~~ f est cont donc g est dérivable et ... $\Rightarrow g \in E_1$.

(b) On suppose désormais que $f(t) > 0$ pour tout t dans $[a, b]$. Étudier les variations de $L(f)$, $L^2(f)$, $L^3(f)$ et $L^4(f)$ puis, plus généralement, $L^n(f)$ lorsque n décrit N^*.

(c) Calculer le cardinal de $\Omega_n = \{t \in [a,b] \mid L^n(f)(t) = 0\}$ lorsque n décrit N^*.

(d) Déterminer le signe de $L^{2n}(f)(a)$ lorsque n décrit N^*.

Partie III

1°. **(a)** Exprimer P_1, P_2 et P_3 en fonction de la variable $t - a$.

(b) Établir l'égalité $P_n(X + b - a) - P_n(X) = (b - a)\dfrac{(X-a)^{n-1}}{(n-1)!}$ lorsque n décrit N^*.

(c) En déduire la valeur de la somme $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

2°. Soit $\mathcal{P} = \mathbb{R}[X]$. On définit sur $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ l'application :

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \varphi(P, Q) = \frac{1}{b-a}\int_a^b P(t)\, Q(t)\, dt.$$

(a) Montrer que φ est un produit scalaire.

(b) Montrer que, si m et n sont deux entiers vérifiant les relations $m \geqslant n > 0$, l'on dispose des égalités :

$$\varphi(P_n, P_m) = (-1)^{n+1} P_{n+m}(a), \quad \text{et} \quad \varphi(P_n, P_0) = 0.$$

(c) Montrer que $P_n(a) = 0$ si, et seulement si, n est impair et différent de 1.

3°. On désigne respectivement par FP_1 et FP_2 les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{P}$ engendrés par les polynômes P_n d'indices pairs et impairs.

(a) Démontrer la relation $\mathcal{P} = FP_1 \oplus FP_2$.

(b) Démontrer que cette somme directe est orthogonale pour le produit scalaire φ.

4°. On désigne par γ_n le nombre $\dfrac{n!}{(b-a)^n} P_n(a)$ (ainsi $\gamma_0 = 1$).

(a) Démontrer la relation $\gamma_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \gamma_k$ pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et en déduire que γ_n est indépendant de a et de b.

(b) Calculer γ_n pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$.

(c) Déterminer une base φ–orthogonale du sous-espace G de FP_2 engendré par la famille (P_0, P_2, P_4, P_5).

2°. Soit $f \in E_0$.

(a) Démontrer l'égalité $L(f)(t) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \left(\int_x^t f(u)\,du\right) dx$ pour tout t dans $[a,b]$.

(b) Démontrer l'existence de deux réels x_i et x_s dans $[a,b]$ tels que, pour tout t dans $[a,b]$:

$$L(f)(x_i) \leqslant L(f)(t) \leqslant L(f)(x_s).$$

(c) Calculer la borne supérieure α de $\displaystyle\int_a^b |x-t|\,dt$ lorsque x décrit $[a,b]$. En déduire que $\|L(f)\| \leqslant \dfrac{b-a}{2}\|f\|$. L'endomorphisme L est-il continu (justifier la réponse) ?

(d) Calculer $\|L(P_0)\|$ ainsi que $|||L||| = \sup \|L(f)\|$ lorsque f décrit la boule unité fermée de E_0 définie par $\|f\| \leqslant 1$.

Partie II

On désigne par F_1 le sous-ensemble de E_0 défini par les fonctions f telles que $f(a+b-t) = \varepsilon f(t)$ pour tout t dans $[a,b]$ avec $\varepsilon = -1$, et F_2 le sous-ensemble analogue avec $\varepsilon = +1$.

On désigne par f_1 l'application $t \mapsto \left(t - \dfrac{a+b}{2}\right)^3$ et par f_2 l'application $t \mapsto (t-a)(t-b)$ où t décrit $[a,b]$.

1°. **(a)** Les ensembles F_1 et F_2 sont-ils vides ? réduits à $\{0\}$?

(b) Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels. Les comparer avec leurs images par L.

2°. Soit f un élément de E_0 et g la fonction définie sur $[a,b]$ par $g(t) = \dfrac{1}{2}\left[f(t) + f(a+b-t)\right]$.

(a) Vérifier que g appartient à F_2.

(b) Démontrer la relation $E_0 = F_1 \oplus F_2$.

(c) Démontrer la relation $L^n(f)(a) = L^n(f)(b)$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

3°. Soit f un élément de F_2.

(a) Démontrer les relations :

$$L^{2n-1}(f)\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0, \qquad L^{2n+1}(f)(a) = L^{2n+1}(f)(b) = 0$$

$$\text{et} \qquad \int_a^{\frac{a+b}{2}} L^{2n}(f)(t)\,dt = 0$$

lorsque n décrit N^*.

Tournez la page S.V.P.

Www.TaalimPro.com

ROYAUME DU MAROC

Ecole Hassania des Travaux Publics

Concours d'Accès en 1ère Année

Réservé aux Titulaires du CUES ou DEUG (option MP)

Epreuve de Physique

Durée : 3 heures

Jeudi 07 Juillet 2005

Www.TaalimPro.com

Le but du problème est l étude de différents systèmes oscillants en physique.

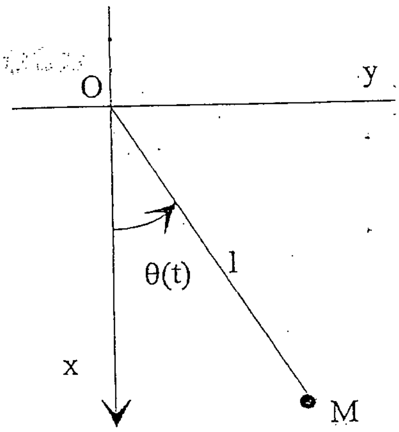
Dans tout le problème, les vecteurs sont écrits en caractères gras.

PREMIERE PARTIE : LE PENDULE SIMPLE

I Un pendule simple non amorti :

On considère un point matériel M de masse m accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur l et de masse nulle. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre **g** = g.**i** (avec g = 9,81 m.s^{-2}), **i** étant un vecteur unitaire de l'axe Ox. On note, l'angle orienté : θ = (**Ox** ,**OM**) = (**i**,**u**) où **u** est un vecteur unitaire colinéaire à **OM**. On néglige les frottements.

On lache la masse d'un angle θ_o sans vitesse initiale.



1-1 Etude dans le cas de petites oscillations: $\sin(\theta) \approx \theta$:

1-1-1 Montrer que le mouvement est plan.

1-1-2 Etablir l'équation différentielle du second ordre, vérifiée par θ.

1-1-3 En supposant que les élongations angulaires sont faibles, montrer que l'équation du mouvement est approchée par celle d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 dont on donnera l'expression en fonction de l et g. En déduire $\theta(t)$. On rappelle que pour les faibles élongations angulaires, $\sin(\theta) \approx \theta$.

1-1-4 On appelle portrait de phase d'un oscillateur le graphe $\dot{\theta} = f(\theta)$, représenter le portrait de phase du pendule étudié.

1-2 Etude aux grands angles : $\sin(\theta) \neq \theta$:

1-2-1 Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de x puis de θ.

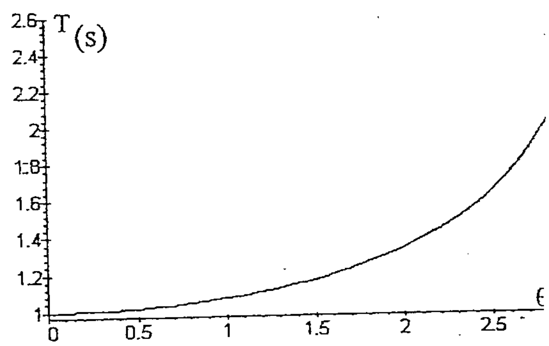
1-2-2 Montrer que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.

En déduire l'équation différentielle du premier ordre reliant $(\frac{d\theta}{dt})^2$; θ, θ_0 et les paramètres caractéristiques du système. On garde les mêmes conditions initiales.

1-2-3 Donner l'expression de la période $T(\theta_0)$ sous forme d'une intégrale en fonction θ, θ_0 et des paramètres caractéristiques du système. On précisera soigneusement les bornes d'intégration.

On ne demande pas de calculer cette intégrale.

Une intégration numérique donne la courbe ci-contre. Commenter la courbe obtenue.



1-2-4 Proposer une méthode pour déterminer expérimentalement les valeurs de T.

II Oscillateur amorti :

Lorsque l'on enregistre expérimentalement $\theta(t)$, on constate que l'amplitude de θ diminue lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par :

f = -α.**v**, **v** désigne la vitesse du point M et α, une constante positive.

2-1 Etablir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ.

DEUXIEME PARTIE : LES CIRCUITS OSCILLANTS

Aucune connaissance particulière sur le multiplieur n'est nécessaire pour répondre aux questions.

Un multiplieur est représenté par un circuit intégré qui réalise le produit des tensions d'entrée v_1 et v_2 et donne une tension de sortie $v_s = k\, v_1 v_2$ (k est une constante positive) (figure 1).

Les courants d'entrée sont toujours nuls ($i_1 = i_2 = 0$).

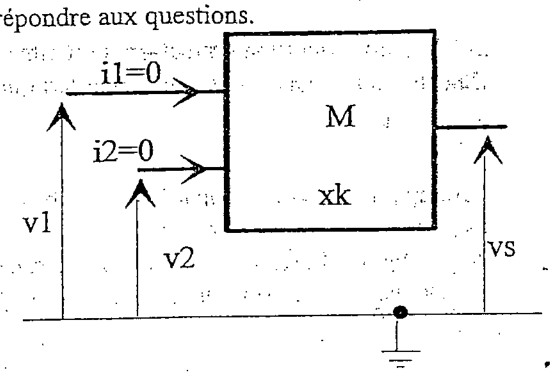


figure 1

IV Oscillateur en régime sinusoïdal forcé :

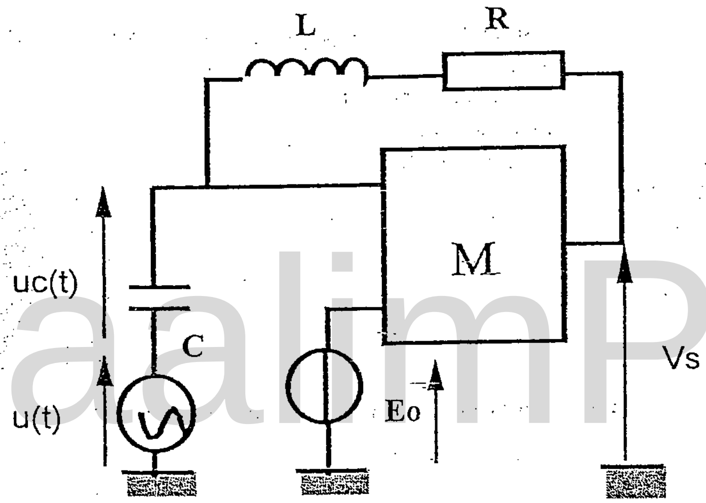


figure 2

La figure 2 montre les différents éléments du circuit; M dé[signe] le multiplieur .

u(t) est la tension d'un générateur sinusoïdal de pulsation ω [et de] tension efficace U, Eo est la fém d'un générateur continue.

4-1a) Montrer que

$$V_s = k.\left(u(t) + u_c(t)\right).Eo$$

où $u_C(t)$ représente la tension aux bornes du condensateur.

b) En déduire l'équation vérifiée par la tension aux borne[s du] condensateur $u_c(t)$ sous la forme :

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{2}{\tau}\frac{du_c}{dt} + \omega_o^2 u_c = \omega_o^2 A\cos(\omega t)$$

Déterminer ω_O, A et τ en fonction des caractéristiques du circuit (U,Eo,R,L,C,k).

4-2 En utilisant la notation complexe, déterminer l'amplitude $U_C(\omega)$ en fonction de τ, A, ω et ω_O.

On donne R = 310 Ω , L = 0.5 H, C = 47 nF, Eo=0 V.

Calculer le facteur de qualité et tracer l'allure de la courbe,$U_c(\omega)$.

Comment peut-on tracer la courbe expérimentalement ? Peut-on utiliser un oscilloscope ?

4-3 On trouve expérimentalement :

Eo(V)	0	1	2	3	4	5	6	7
ω_O(rad/s).10^{-3}	6,52	6,18	5,83	5,46	5,05	4,61	4,13	3,57

Vérifier que $\omega_O{}^2$ est une fonction affine de Eo. En déduire la valeur de k.

En se limitant aux petits angles, écrire l'équation sous la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{2}{\tau}\frac{d\theta}{dt}+\omega_o^2\theta=0$$

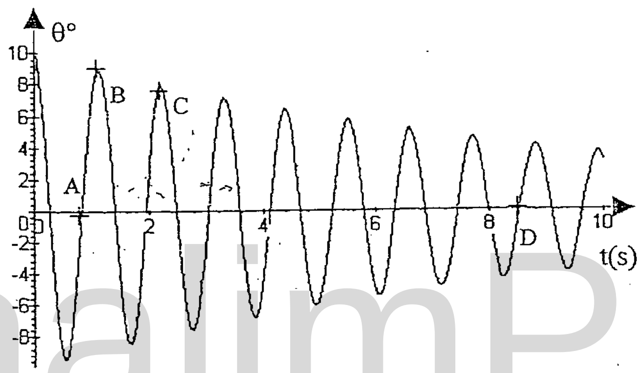
Donner l'expression de τ et son interprétation physique.

2-2 A quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ?
Dans le cadre d'un régime pseudo-périodique, calculer la pseudo-pulsation ω et la pseudo-période T.

On appelle décrément logarithmique, δ la quantité $\ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right)$ où T est la pseudo-période et t le temps.
Exprimer δ en fonction de T et τ.

2-3 La figure ci dessous représente les variations de θ avec le temps.
On précise les coordonnées de 4 points particuliers:

Points	A	B	C	D
t (s)	0,53	1,1	2,2	8,25
θ(°)	0	8,95	8,02	0



La masse est m = 470 g.
Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentale
a) le décrément logarithmique δ;
b) la pseudo-période, T;
c) le temps τ;
d) la constante α.

2-4 A quelle condition obtient-on un régime apériodique ? Donner l'allure du graphe $\theta(t)$ dans ce cas, on suppose que : $\dot{\theta}(t=o)=0$ et $\theta(t=o)=\theta 0$

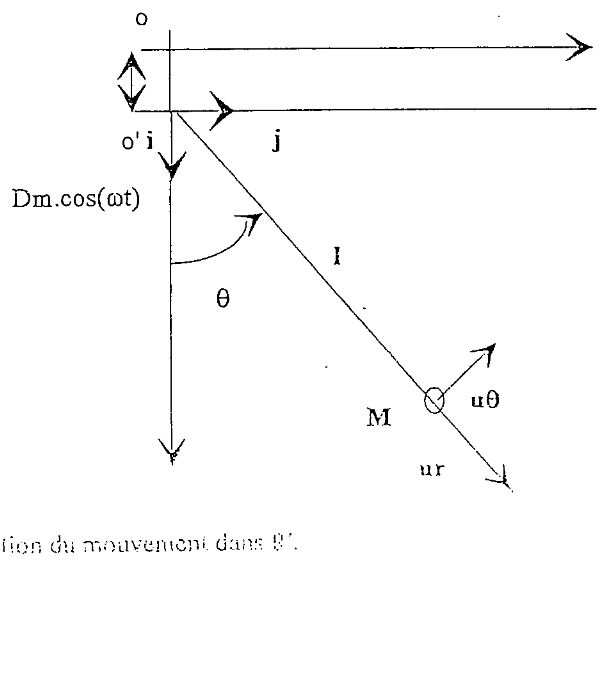
2-5 Donner l'allure des portraits de phase du pendule amorti dans les deux cas étudiés : le régime pseudo-périodique et le régime apériodique.

III Oscillateur paramétrique :

Un pendule simple est constitué d'un point matériel M de masse m, placé à l'extrémité d'un fil inextensible, de longueur l et de masse négligeable. L'autre extrémité du fil est fixée en O' qui oscille sinusoïdalement suivant la verticale, avec une amplitude D_m et une pulsation ω :

$$OO' = D_m.\cos(\omega.t).i$$

On désigne par θ l'angle que fait le pendule avec la verticale descendante. On suppose qu'il n'y a pas de frottement. On note R(O,i,j,k) le référentiel terreste supposé galiléen et R'(O',i,j,k) le référentiel lié au support du pendule.



3-1 Le référentiel R' est-il galiléen?
3-2 En utilisant le théorème du moment cinétique en O', écrire l'équation du mouvement dans R'.
3-3 Montrer que l'équation peut s'écrire:

ROYAUME DU MAROC

Ecole Hassania des Travaux Publics

Concours d'Accès en 1ère Année

Réservé aux Titulaires du CUES ou DEUG

- Epreuve de Mathématiques
- Durée : 4h

Vendredi 14 Juillet 2006

Epreuve de Mathématiques

Durée 4 heures

L'usage de la calculatrice est interdit .

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre .

*****

L'énoncé comporte deux problèmes indépendants. Ils doivent être rédigés sur des copies séparées.

Problème n° 1 .

Première partie.

1) On considère la suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}} - \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} \,.$$

a) Étudier le sens de variation de la suite u .

b) Montrer que la suite u est convergente vers un réel L que l'on ne cherchera pas à calculer.

c) En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$ lorsque n tend vers plus l'infini.

2) Soit la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sin v_n \,.$$

a) Étudier le sens de variation de la suite v.

b) Montrer que la suite v est convergente vers un réel que l'on précisera.

c) Déterminer un réel α tel que la suite de terme général $v_{n+1}^{\alpha} - v_n^{\alpha}$ converge vers un réel non nul.

d) On admettra le théorème de Césaro, à savoir :

Pour toute suite réelle w convergente vers un réel l on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} w_k \right) = l.$

A l'aide du théorème de Césaro, montrer que :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}} \,.$$

Troisième partie.

On considère la série entière réelle $\sum v_n x^n$ où v est la suite définie dans la partie I) question 2), on notera V l'application définie sur $]-1,1[$ par :

$$\forall x \in]-1,1[\ , V(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n.$$

1) a) Montrer que V est bien définie.

b) On note W l'application définie sur $]-1,1[$ par :

$$\forall x \in]-1,1[\ , W(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

Montrer que W est bien définie et que :

$$V(x) \underset{x\to 1}{\sim} W(x)\sqrt{3}.$$

2) On pose pour tout x de $]0,1[$, $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.

a) Montrer que l 'application $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ est intégrable sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

b) Montrer que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ [W(x)]^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right)\right] x^n.$$

c) On notera :

$$\forall n \geqslant 2,\ H_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right).$$

α) Montrer que :

$$\forall m \geqslant 1,\ H_{2m} = \frac{1}{2m}\left[2\sum_{k=1}^{m-1} h\left(\frac{k}{2m}\right) + h\left(\frac{1}{2}\right)\right].$$

β) Montrer que :

$$\forall m \geqslant 1\ ,\quad H_{2m+1} = \frac{2}{2m+1}\left[\sum_{k=1}^{m} h\left(\frac{k}{2m+1}\right)\right].$$

3) On définit la suite s par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s_n = \sum_{p=1}^{n} v_p\ .$$

a) Déterminer la limite de s_n lorsque n tend vers plus l'infini.

b) α) En remarquant que v_n équivaut à $\sqrt{\dfrac{3}{n}}$ quand n tend vers plus l'infini, montrer que, pour tout réel ε strictement positif, il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier naturel n strictement supérieur à N on ait :

$$\left| \frac{\displaystyle\sum_{p=N+1}^{n} \left(\sqrt{\frac{3}{p}} - v_p \right)}{s_n} \right| < \varepsilon.$$

β) En déduire que s_n équivaut à $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \sqrt{\frac{3}{p}}$ quand n tend vers plus l'infini.

γ) Déterminer un équivalent simple de s_n lorsque n tend vers plus l'infini.

Deuxième partie.

On considère deux séries entières réelles $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ de même rayon de convergence égal à 1 et vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0 \text{ et } b_n > 0. \\ a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n. \\ \text{la série } \sum a_n \text{ diverge.} \end{cases}$$

On note : $\forall x \in]-1, 1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

1) a) Montrer que f est croissante sur $]0, 1[$.

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = +\infty$.

2) a) En remarquant que a_n équivaut à b_n lorsque l'entier naturel n tend vers plus l'infini, montrer que, pour tout réel ε strictement positif, il existe un entier naturel N tel que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ on ait :

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (b_n - a_n) x^n \right| \leqslant \varepsilon f(x)$$

b) En utilisant la question II) 1) b), déterminer la limite de $\dfrac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} (b_n - a_n) x^n}{f(x)}$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

c) En déduire que $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

4) Soit une série entière réelle $\sum d_n x^n$ de rayon de convergence égal à 1 telle que :

$$\forall n \geqslant 0,\ d_n \geqslant 0 \quad et \quad \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n \underset{x \to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

a) Donner un exemple de série de terme général d_n remplissant les conditions précédentes .

b) On note , $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = \sum_{p=0}^{n} d_p$ et $e_n = \sum_{k=0}^{n} d_k d_{n-k}$.

α) En utilisant les questions précédentes, montrer que :

$$\sum_{n=0}^{N} e_n \underset{N \to +\infty}{\sim} N.$$

β) Montrer que pour tout entier naturel N :

$$\sum_{n=0}^{N} e_n \leqslant T_N^2 \leqslant \sum_{n=0}^{2N} e_n.$$

γ) En déduire que $T_n = O(\sqrt{n})$ quand n tend vers plus l'infini.

δ) Montrer que s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{T_n}{\sqrt{n}} = \lambda$ alors $\lambda \in \left[1, \sqrt{2}\right]$.

Problème n°2 .

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, et E est un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $\langle .,. \rangle$ et la norme associée est notée $\|.\|$. On note id_E l'application identique de E, et $\tilde{0}$ l'application nulle de E.
Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^{\perp}$ le sous-espace vectoriel supplémentaire orthogonal de F dans E.
Le projecteur de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$ est appelé projecteur orthogonal sur F.
Pour tout endomorphisme f de E et toute valeur propre λ de f, on note $E_f(\lambda)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.

Partie I : Inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique

On considère un endomorphisme symétrique f de E, c'est-à-dire un endomorphisme f tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

On suppose de plus que f est non inversible et non nul.

1) Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au-moins une valeur propre non nulle.

2)a) Soient λ et μ deux valeurs propres de f.
Montrer, pour tout vecteur x de $E_f(\lambda)$ et pour tout vecteur y de $E_f(\mu)$:

$$\lambda \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

b) En déduire que les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

γ) En encadrant avec soin H_{2m} et H_{2m+1} , déterminer les limites de H_{2m} et H_{2m+1} lorsque m tend vers plus l'infini.

3) Déduire des questions précédentes un équivalent simple de $W(x)$ puis de $V(x)$ lorsque x tend vers 1.

Quatrième partie.

Soit k l'application définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{e}\right[, k(t) = 0.$$
$$\forall t \in \left[\frac{1}{e}, 1\right], k(t) = \frac{1}{t}.$$

On admettra la propriété $(\mathcal{K})$:
$\forall \varepsilon > 0$, il existe un couple $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que :

$$\forall x \in [0,1] \text{ , } P(x) \leqslant k(x) \leqslant Q(x) \quad , \int_0^1 (k(x) - P(x))\,dx \leqslant \varepsilon \quad , \int_0^1 (Q(x) - k(x))\,dx \leqslant \varepsilon.$$

On considère une série entière réelle $\sum c_n x^n$ de rayon de convergence égal à 1 telle que :

$$\forall n \geqslant 0,\ c_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \underset{x \to 1}{\sim} \frac{1}{1-x}.$$

On notera $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ pour $x \in]0,1[$.

1) a) Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \lim_{x \to 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+np} = \frac{1}{p+1}.$$

b) En déduire que :

$$\forall R \in \mathbb{R}[X],\ \lim_{x \to 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n R(x^n) = \int_0^1 R(t)\,dt.$$

2) En utilisant la propriété $(\mathcal{K})$, montrer que :

$$\lim_{x \to 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n k(x^n) = \int_0^1 k(t)\,dt.$$

3) En posant $x = e^{-\frac{1}{N}}$ avec $N \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\sum_{n=0}^{N} c_n \underset{N \to +\infty}{\sim} N.$$

27

3) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

On suppose que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ avec $k \geqslant 1$, $\lambda_0 = 0$ et $0 < |\lambda_1| \leqslant \dots \leqslant |\lambda_k|$.
Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k, on note p_j le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_j)$.

4) Soit x un vecteur de E.

a) Montrer qu'il existe un unique $(k+1)$-uplet $(x_0, x_1 \dots, x_k)$ de $E_f(0) \times E_f(\lambda_1) \times \dots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = x_0 + x_1 + \dots + x_k$.

b) Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k, montrer : $p_j(x) = x_j$.
Ainsi, la relation suivante est clairement vérifiée :

$$id_E = p_0 + p_1 + \dots + p_k$$

5)a) Etablir, pour tout couple (i,j) d'entiers naturels inférieurs ou égaux à k :

$$i \neq j \Longrightarrow p_i \circ p_j = \tilde{0}$$

b) Montrer : $\quad f = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_k p_k$.

c) Montrer que le projecteur orthogonal p sur $\mathrm{Im}\, f$ vérifie :

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_k$$

On note $f^\sharp$ l'endomorphisme de E défini par $f^\sharp = \dfrac{1}{\lambda_1} p_1 + \dfrac{1}{\lambda_2} p_2 + \dots + \dfrac{1}{\lambda_k} p_k$.

On dit que $f^\sharp$ est l'inverse généralisé de f.

6)a) Montrer : $\quad f \circ f^\sharp = p$.

b) En déduire : $\quad \forall (x,y) \in E^2, \ \left(f(x) = p(y) \Longleftrightarrow x - f^\sharp(y) \in \mathrm{Ker}\, f \right)$.

7) Soit y un vecteur de E.

a) Montrer : $\quad \forall x \in E, \ \left(\|f(x) - y\| = \inf\limits_{z \in E} \|f(z) - y\| \Longleftrightarrow x - f^\sharp(y) \in \mathrm{Ker}\, f \right)$

b) En déduire que $f^\sharp(y)$ est le vecteur x de E de plus petite norme vérifiant :

$$\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\|$$

Partie II : Application à un exemple

Dans cette question, E est un espace euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormale de E. On note :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de E associé à la matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$.

1) Justifier que f est un endomorphisme symétrique non nul et non inversible.

2) Montrer que f admet exactement trois valeurs propres distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

On note p_1 le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_1)$ et M_1 la matrice associée à p_1 relativement à la base $\mathcal{B}$.
On note p_2 le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_2)$ et M_2 la matrice associée à p_2 relativement à la base $\mathcal{B}$.

3) Montrer : $\quad A = 2M_1 + 4M_2$.

4)a) Montrer que $E_f(\lambda_2)$ est de dimension 1 et déterminer un vecteur v_2 de $E_f(\lambda_2)$ tel que $\|v_2\| = 1$.

b) Montrer : $\quad \forall x \in E, \quad p_2(x) = \langle x, v_2 \rangle v_2$.

c) Déterminer la matrice M_2.

5) En déduire la matrice associée à $f^\sharp$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

Fin de l'énoncé

ROYAUME DU MAROC

Ecole Hassania des Travaux Publics

Concours d'Accès en 1ère Année

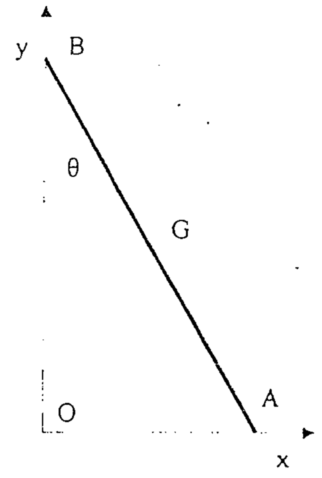
Réservé aux Titulaires du CUES ou DEUG

- Epreuve de Physique
- Durée : 3h

Vendredi 14 Juillet 2006

L' EPREUVE COMPORTE TROIS PARTIES INDEPENDANTES

Première partie : Echelle contre un mur



Une échelle posée contre un mur est représentée par une barre AB dont les mouvements éventuels ont lieu dans le plan Oxy. Le centre d'inertie G de la barre est le milieu de AB.
Les contacts sont modélisés par les lois de Coulomb du frottement solide, avec un coefficient de frottement *f* en A, entre la barre et le sol et un coefficient de frottement *g* en B, entre la barre et le mur.

On utilisera les notations suivantes:

θ: angle que fait l'échelle avec la verticale, compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$

(- P y) : poids de l'échelle.
(a x + α y): liaison subie par l'échelle en A.
(β x +b y): liaison subie par l'échelle en B.
P, α et β sont positifs.
x: vecteur unitaire horizontal, orienté dans le sens des x croissants.
y: vecteur unitaire vertical, orienté vers le haut.
L'échelle reste immobile. Établir un système d'égalités indépendantes vérifiées par P, α, β, a, b et θ. Combien trouve t-on d'égalités ?
Pour θ fixé, combien le problème comporte t'il d'inconnues ?
a-t-il en général une solution unique ? Expliquer concrètement ce qui se passe.

On suppose en plus, que l'échelle bien que restant immobile, est à la limite de glisser et de tomber par terre.

a) Quelles relations a-t-on alors entre α, β, a et b ? Combien a-t-on d'égalités maintenant ?
b) En déduire que θ.
ne peut pas être fixé arbitrairement. Expliquer la conséquence concrète de cette situation.
Exprimer tan θ.
en fonction de *f* et de *g*.
c) Pour f= 0.5 et g = 0.3 calculer l'angle θ.
en degrés et décrire qualitativement ce qui se passe si on lâche l'échelle sans vitesse initiale alors qu'elle fait un angle de 30° avec la verticale, puis lorsqu'elle fait initialement un angle de 70° avec la verticale.

Deuxième partie

Données :

Constante de la gravitation universelle : G = $6{,}67.10^{-11}$ N.m^2. kg^{-2}
Période orbitale de révolution terrestre (année solaire) T_A = 365,26 jours solaires de 86400 s
Rayon moyen de l'orbite terrestre : R = $1{,}.50.10^{11}$ m
Masse de la Terre : M_T = $5{,}98.10^{24}$ kg
Rayon du Soleil : a_S = $7{,}1.10^{8}$ m
Formulaire sur les ellipses :

Soit une ellipse d'excentricité e, de paramètre p, de demi-grand axe a, de demi-petit axe b et d'aire A.

Alors : $a = \dfrac{p}{1-e^2}$ $\quad b = \dfrac{p}{\sqrt{1-e^2}}$ $\quad A = \pi ab$

Le Soleil est considéré comme un astre dont la répartition de masse est à symétrie sphérique, de centre S et de masse M_S, **très supérieure à celle M_T de la Terre**. Le référentiel de Képler (R_K) = (S XYZ) centré en S et dont les axes SX,.SY et SZ gardent des directions fixes est considéré comme galiléen.
Sauf indication contraire, la Terre sera considérée comme à symétrie sphérique de centre T et on suppose qu'elle ne subit que l'action du Soleil.

I-2-4 : Discuter rapidement et sans calculs de la stabilité de cette position d'équilibre vis à vis de petites variations de position, qu'on supposera avoir lieu le long de la droite (Sx).

I-3 : En réalité, l'orbite de la Terre n'est pas rigoureusement circulaire.

I-3-1 : Justifier que l'orbite terrestre (trajectoire de son centre T dans le référentiel de Képler) est cependant plane ; on supposera dans la suite que ce plan, appelé écliptique, est confondu avec le plan (S XY).

La conséquence principale de la non-circularité de l'orbite terrestre est l'inégalité des durées des saisons. Il se trouve que les dates des solstices d'hiver (de l'hémisphère nord) et d'été coïncident respectivement avec le passage de la Terre au périhélie H *(point de l'orbite le plus proche du Soleil)* et à l'aphélie E *(point de l'orbite le plus éloigné du Soleil)* de son orbite : H est supposé être sur l'axe (SX) de (R_K).
Les positions des équinoxes de printemps P et d'automne A coïncident aux passages de la Terre sur la droite (SY) perpendiculaire à la direction (SX) = (SH).
La durée de l'hiver T_H = 89,4 jours solaires moyens de 86 400 s, celle du printemps est T_P = 93,2 jours solaires.

I-3-2 : Enoncer sans démonstration la nature géométrique de l'orbite terrestre (ou première loi de Képler dans le cas présent). Représenter cette orbite sur un schéma où figureront aussi S, H, P, E et A, et les axes (SX) et (SY). Pour plus de clarté, on ne craindra pas d'en exagérer l'excentricité.

I-3-3 : Enoncer et justifier la loi des aires (ou deuxième loi de Képler dans le cas présent).

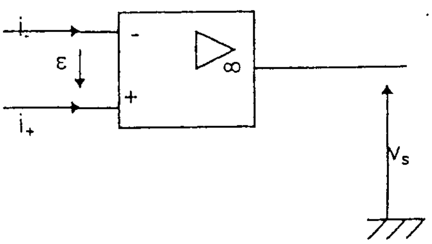
I-3-4 : Soit e l'excentricité de l'orbite terrestre. Comme e << 1, on peut montrer que l'aire du secteur SHP de l'ellipse est $A_H = \frac{a\,b}{4}(\pi - 4e)$, a et b représentant respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse trajectoire.
Etablir alors la relation entre la durée de l'hiver T_H, la durée T_A de l'année et l'excentricité e.

I-3-5 : En déduire la valeur numérique de l'excentricité e de l'orbite terrestre.

I-3-6 : Donc, durant la 'belle saison' (printemps et été) de l'hémisphère nord, la Terre est en moyenne plus éloignée du Soleil que durant la 'mauvaise saison'.
A ce propos, quelle caractéristique du mouvement de la Terre permet d'interpréter le phénomène des saisons ? On illustrera la réponse par un schéma clair.
Interpréter le fait que les saisons sont plus contrastées dans l'hémisphère sud que dans l'hémisphère nord.

Troisième partie

Ce problème ne nécessite aucune connaissance sur le fonctionnement des amplificateurs opérationnels. Toutes les propriétés nécessaires à la réponse aux questions sont fournies dans l'énoncé.
Les A.O. utilisés possèdent les propriétés suivantes : (figure 1)



$i_+ = i_- = 0$

$|v_s| < V_{sat}$ si $\varepsilon = 0$

$v_s = + V_{sat}$ si $\varepsilon > 0$

$v_s = - V_{sat}$ si $\varepsilon < 0$

V_{sat} étant une constante positive

fig1

A.1) Tracer la caractéristique $v_s = f(\varepsilon)$ d'un de ces A.O.

On considère dans un premier temps (questions I-1 et I-2) que l'orbite terrestre est circulaire de centre S et de rayon R

I-1 :

I-1-1 : Dans ces conditions, en appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique à la Terre, établir simplement la relation existant entre la vitesse angulaire de révolution Ω_A de la Terre sur son orbite, la constante de gravitation universelle G, R et M_S.

I-1-2 : Donner alors l'expression de la durée de l'année T_A en fonction de G,R et M_S et en déduire la valeur numérique de M_S.

I-2 : Tous les 11 ans en moyenne, le Soleil connaît de brutales éruptions qui éjectent violemment de grande quantités de particules chargées. Quand ce 'vent solaire' atteint la Terre, cela nuit aux télécommunications hertziennes. Il est donc nécessaire de disposer de satellites de surveillance du Soleil, placés constamment entre le Soleil et la Terre.

On travaillera dans le référentiel (R')=(S xyZ) tournant autour de (SZ) par rapport au référentiel de Képler en suivant le mouvement de la Terre, toujours supposé circulaire de rayon R, tel que T soit constamment sur la droite (Sx).

Soit P un tel satellite, assimilable à un point matériel de masse m. P doit tourner autour de S sur une orbite circulaire, de façon que S, P et T soient constamment alignés. P est donc supposé en équilibre dans le référentiel (R'), en un point tel que $\overrightarrow{PT} = d\,.\,\overrightarrow{e_x}$ où $\overrightarrow{e_x}$ est le vecteur directeur de l'axe (Sx), voir *Figure I*

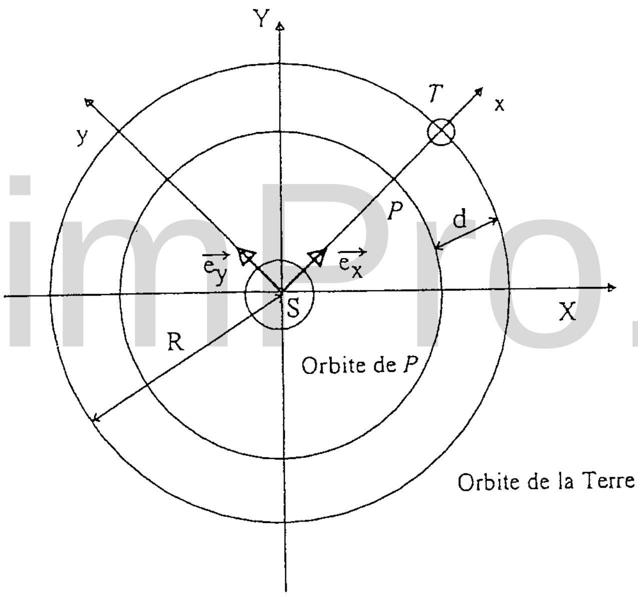


Figure I

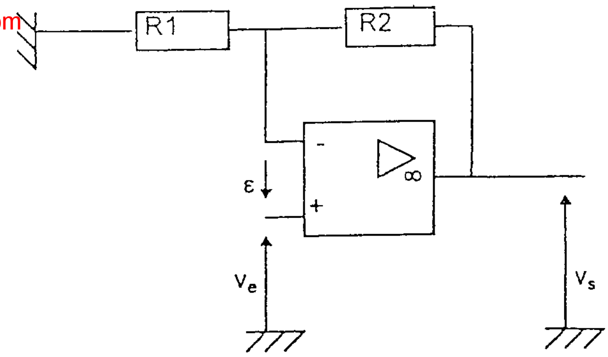
I-2-1 : Le référentiel (R') est-il galiléen ?
Effectuer le bilan des forces s'exerçant dans ce référentiel sur P, qui y sera supposé à l'équilibre. Ces forces seront exprimées dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ liée à (R') en fonction de G, M_S, M_T, R et d.

I-2-2 : Ecrire alors la condition d'équilibre de P relativement à (R'). En déduire une relation entre M_S, M_T, R et d.

I-2-3 : Résoudre cette équation en d : on utilisera le fait que d << R , et l'on pourra effectuer un développement limité en $\dfrac{d}{R}$. On rappelle que si $|\varepsilon| << 1$, alors $(1+\varepsilon)^{\alpha} \approx 1+\alpha\varepsilon$

Vérifier l'homogénéité du résultat.
Calculer numériquement cette valeur de d à l'équilibre.

A.2) Déterminer, pour le montage de la figure 2 (non inverseur) la caractéristique $v_s = g(v_e)$ pour $- Vsat < Ve < +Vsat$:
on prendra $R_2 = 220$ kΩ, $R_1 = 10$ kΩ, Vsat = 14 V



fig

A.3.a) On considère le montage de la figure 3 <u>où les bornes + et - ont été permutées</u>

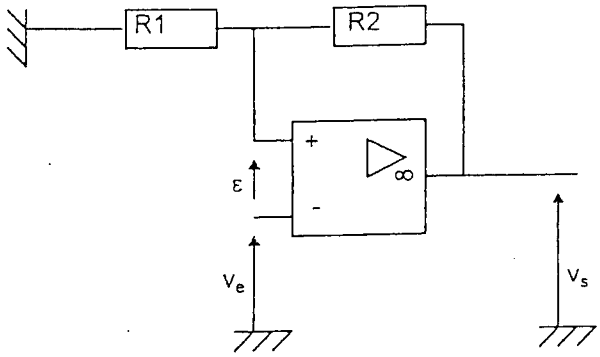


fig 3

. On peut alors montrer que l'A.O. ne fonctionne plus en régime linéaire, c'est à dire que <u>ε est toujours non nul</u>.

Exprimer ε en fonction de v_e et v_s . En déduire la condition à imposer à ve pour que l'A. O. soit
· en saturation positive ($v_s = +V_{sat}$), soit $v_e < V+$
· en saturation négative ($vs = -V_{sat}$), soit $v_e > V-$

Exprimer V+ et V- en fonction de R_1, R2, Vsat.
Déterminer leurs valeurs numériques (on utilisera les données du A.2)

A.3.b) Appliquer les résultats précédents pour étudier la caractéristique $v_s = h(v_e)$.

- Pour cela, on considère l'état initial $v_e = v_O$ (avec $v_O < V-$), $v_s = V_{sat}$, et on fait croître v_e à partir de v_O. Montrer que, pour $v_e = V+$, v_s bascule à $- V_{sat}$. Si v_e continue à augmenter, observe-t-on une nouvelle modification de vs ?
- On considère maintenant l'état initial $v_e = v'_O$ (avec $v'_O > V+$), $v_s = - V_{sat}$, et on fait décroître ve. Montrer que,

pour $v_e = V-$, v_s bascule à $+V_{sat}$. Si v_e continue à décroître, observe-t-on une nouvelle modification de vs ?

- Déduire de ces remarques la caractéristique $v_s = h(v_e)$, appelée cycle d'Hysterésis, pour v_e variant entre v_O et v'_O .

A.3.c) On envisage maintenant le montage de la figure 4.

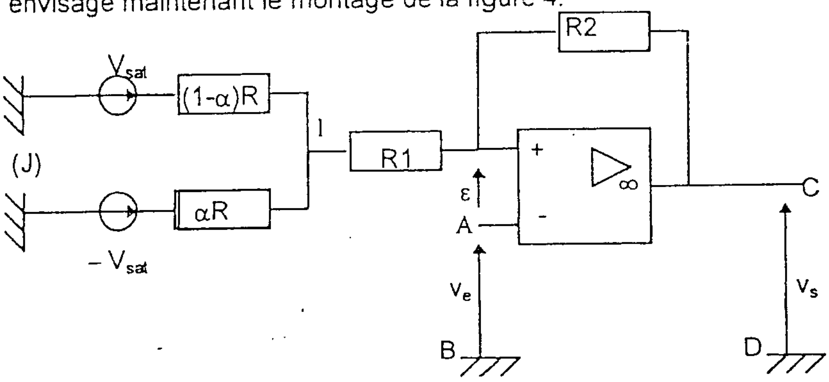


fig4

$0 \leq \alpha \leq 1$

- Déterminer le générateur de Thévenin équivalent au dipôle [IJ].
- Reprendre de façon précise les questions A.3.b.: exprimer en fonction de α, R_1, R_2, R, V_{sat} les nouvelles valeurs de V+ et V-, et tracer la courbe $v_s = G(v_e)$.

Déterminer les grandeurs $Vm = (V_+ + V_-)/2$ et $\Delta V = V_+ - V_-$
Application numérique: α = 0,2 puis α = 0,8 et R << R_1 (par exemple R ~ 1 kΩ)

ROYAUME DU MAROC

Ecole Hassania des Travaux Publics

Concours d'Accès en 1ère Année

Réservé aux Titulaires du DEUG

- Epreuve de Mathématiques
- Durée : 3h

Mercredi 11 Juillet 2007

Epreuve de Mathématiques

L'usage des calculatrices est interdit

Exercice 1

R est le corps des nombres réels et n un entier naturel.
E est le R espace vectoriel normé des applications continues de $[-\pi,\pi]$ vers R muni de la norme de la convergence uniforme, ainsi pour f élément de E, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$.

On considère un endomorphisme de E noté T vérifiant les deux propriétés (P_1) et (P_2) suivantes :

(P_1) si f est un élément de E de classe C^1, $T(f)$ est de classe C^1 et $T(f') = T(f)'$.

et

(P_2) pour toute suite $(f_n)_n$ qui converge dans $(E, \|\ \|_\infty)$, la suite $(T(f_n))_n$ converge dans $(E, \|\ \|_\infty)$ et $T(\lim_{n\to+\infty} f_n) = \lim_{n\to+\infty} T(f_n)$.

Pour tout n, $n \geq 1$, on considère les applications c_n et s_n de $[-\pi,\pi]$ vers R définies par :

$$c_n(x) = \cos(nx) \quad \text{et} \quad s_n(x) = \sin(nx).$$

On note c_0 l'application de $[-\pi,\pi]$ vers R définie par : $c_0(x) = 1$.

Le but de l'exercice est d'établir qu'il existe un réel λ tel que : $\forall f \in E$, $T(f) = \lambda f$.

1° Dans cette question on établit quelques résultats indépendants les uns des autres qui pourront être utilisés dans la suite de l'exercice.

a) On suppose $n \geq 1$. Quelles sont les fonctions réelles solutions sur R de l'équation différentielle : $y'' + n^2 y = 0$?

4° Etude de $T(f)$.

a) Soit f un élément de E, f de classe C^1, tel que $f(\pi) = f(-\pi)$. On note $\tilde{f}$ l'application de R vers R, 2π - périodique, telle que : $\forall\, x \in [-\pi, \pi]$, $\tilde{f}(x) = f(x)$.

Etudier la convergence de la série de Fourier de $\tilde{f}$. En déduire que : $T(f) = \lambda f$.

b) Soit f un élément de E, f impaire. Soit F une primitive de f sur $[-\pi, \pi]$. Calculer $T(F)$.

En déduire que : $T(f) = \lambda f$.

c) Soit f un élément quelconque de E. Montrer que : $T(f) = \lambda f$.

Exercice 2

C est le corps des nombres complexes et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
E est un C-espace vectoriel de dimension égale à n. On désigne par e l'application identique de E. Soit f un endomorphisme de E. On définit la suite $(f^p)_p$ par : $f^0 = e$ et $f^{p+1} = f o f^p$.

S'il existe un entier naturel non nul q tel que $f^q = 0$, l'endomorphisme f est dit nilpotent.
Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $f_{|F}$ la restriction de f à F. $f_{|F}$ est une application linéaire de F vers E. Si de plus F est stable par f, c'est à dire si $f(F)$ est inclus dans F, on pourra aussi considérer $f_{|F}$ comme un endomorphisme de F.

Première partie : Etude de quelques propriétés des endomorphismes nilpotents.

1° Soit f un endomorphisme de E et p un entier naturel.

a) Prouver que : $\mathrm{Ker}\, f^p \subset \mathrm{Ker}\, f^{p+1}$ et que $f\left(\mathrm{Ker}\, f^{p+1}\right) \subset \mathrm{Ker}\, f^p$.

b) Soit F un sous-espace vectoriel de E. On pose $u = f_{|F}$.

Ecrire $\mathrm{Ker}\, u$ en fonction de $\mathrm{Ker}\, f$ et de F.

c) Considérer la restriction de f à $\mathrm{Ker}\, f^{p+1}$ notée u pour démontrer que :

$$\dim \mathrm{Ker}\, f^{p+1} \leq \dim \mathrm{Ker}\, f^p + \dim \mathrm{Ker}\, f .$$

2° Soit f un endomorphisme nilpotent de E.

a) Prouver que 0 est la seule valeur propre de f.

b) Etablir que $f^n = 0$.

c) Montrer que le rang de f est inférieur ou égal à $n-1$.

3° Soit f un endomorphisme nilpotent de E. On suppose que le rang de f est égal à $n-1$.

a) Montrer que : $\forall\, p \in \{0,1,2,\ldots\ldots,n\}$, $\dim \mathrm{Ker}\, f^p = p$ (indication : utiliser l'inégalité établie à la question 1°c) ci-dessus).

b) Soit F un sous-espace vectoriel de E, stable par f, de dimension égale à p.

Soit $u = f_{|F}$. Calculer u^p.

b) Soit f un élément de E. Prouver qu'il existe g et h appartenant à E tels que :

$$f = g + h \quad , \; g \text{ est paire } \; , \; h \text{ est impaire.}$$

c) Soit $\widetilde{\varphi}$ l'application de R vers R, 2π - périodique, telle que : $\forall\, x \in [-\pi, \pi]$, $\widetilde{\varphi}(x) = x^2$.

Calculer les coefficients de Fourier réels de $\widetilde{\varphi}$.

Etudier la convergence de la série de Fourier de $\widetilde{\varphi}$ (préciser le mode de convergence de cette série et sa somme).

2° Premières propriétés de T.

a) Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E. On suppose que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$. On pose : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Justifier que S appartient à E, que la série de fonctions $\sum \mathrm{T}(u_n)$ converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$ et que : $\mathrm{T}(S) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{T}(u_n)$.

b) Soit f un élément de E, f de classe C^n, $n \geq 1$. Montrer que $\mathrm{T}(f)$ est de classe C^n et que : $\mathrm{T}(f^{(n)}) = \mathrm{T}(f)^{(n)}$.

En déduire que si f est de plus une fonction polynômiale, alors $\mathrm{T}(f)$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à celui de f.

3° Etude de $\mathrm{T}(c_n)$ et de $\mathrm{T}(s_n)$.

a) Prouver qu'il existe un réel α_0 tel que : $\mathrm{T}(c_0) = \alpha_0 c_0$ et que pour $n \geq 1$, il existe (α_n, β_n) de $\mathbb{R}^2$, tel que : $\mathrm{T}(c_n) = \alpha_n c_n + \beta_n s_n$.

b) Soit φ l'élément de E défini par : $\forall\, x \in [-\pi, \pi]$, $\varphi(x) = x^2$. Justifier l'existence de (λ, μ, ν) de $\mathbb{R}^3$ tel que : $\forall\, x \in [-\pi, \pi]$, $\mathrm{T}(\varphi)(x) = \lambda x^2 + \mu x + \nu$.

c) En déduire que :

$$\forall\, x \in [-\pi, \pi],\ \lambda x^2 + \mu x + \nu = \alpha_0 \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)\right).$$

d) Montrer que :

i) $\mu = 0$.

ii) $\forall\, n \geq 1, \alpha_n = \lambda$ et $\beta_n = 0$.

iii) $\alpha_0 = \lambda$ et $\nu = 0$.

e) Etablir que pour tout n, $\mathrm{T}(c_n) = \lambda c_n$ et que pour $n \geq 1$, $\mathrm{T}(s_n) = \lambda s_n$.

L'épreuve comporte deux parties indépendantes

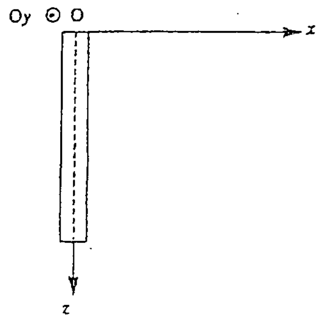
D036

N.B : Les vecteurs sont notés en caractère gras

Première Partie : Mécanique

I - Rotation autour d'un axe horizontal.

Figure 1



1) Soit une tige cylindrique homogène, de masse M, de longueur l, à section circulaire de faible rayon a

On note R le référentiel galiléen (Ox, Oy, Oz), Oz étant un axe vertical descendant (figure 1).

On désigne par J_{0y} et J_{0z} les moments d'inertie de la tige par rapport aux axes Oy et Oz.

a) Exprimer J_{0z} puis J_{0y}.

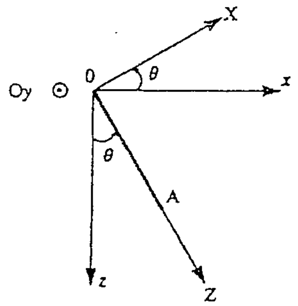
b) Quelle erreur relative $\frac{\Delta J_{0y}}{J_{0y}}$ commet-on en prenant pour J_{0y} la valeur approchée $\frac{M\,l^2}{3}$?

c) Calculer $\frac{\Delta J_{0y}}{J_{0y}}$ et J_{0y} avec les données numériques suivantes :

$$l = 0{,}5 \text{ m}, \quad a = 0{,}01\text{m}, \quad M = 1 \text{ kg}.$$

Dans la suite du problème on prendra pour J_{0y} la valeur approchée $\frac{M\,l^2}{3}$, la section circulaire étant considérée quasi ponctuelle.

Figure 2



2) La tige OA peut tourner sans frottement autour de l'axe horizontal Oy dans le plan xOz. Elle n'est soumise qu'à son poids et à l'action du support. La position de la tige est repérée par l'angle (Oz, OA) = $\theta(t)$ (figure 2). On lance la tige avec des conditions initiales :

$$\theta(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(0) = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = \omega_0.$$

a) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer la relation liant $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega(t)$. *cette relation est notée (1)*

b) Pour quelle valeur minimale ω_{0m} de ω_0, la tige peut elle effectuer un tour complet ?

c) Représenter graphiquement l'allure de $\dot{\theta} = f(\theta)$ (le portrait de phase du mouvement), dans les deux cas suivants:

Premier cas : $\omega_0 < \omega_{0m}$ Deuxième cas : $\omega_0 > \omega_{0m}$

d) En dérivant l'équation (1), determiner l'équation différentielle du deuxième ordre qui régit le mouvement de la tige (Equation (2)).

e) En appliquant le théorème du moment cinétique à la tige, retrouver l'équation (2).

f) On appelle **R** la résultante des actions exercées en O par l'axe de rotation (colinéaire à Oy) sur la tige OA. Déterminer en fonction de θ les composantes R_X et R_Z de **R** sur la base « tournante » OX, OZ (figure 2).

c) Démontrer qu'il existe $n+1$ sous-espaces vectoriels de E stables par f et qu'il s'agit des $\operatorname{Ker} f^p$, p élément de $\{0,1,2,\ldots,n\}$.

d) Montrer que : $\forall\, p \in \{0,1,2,\ldots,n\}$, $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Ker} f^{n-p}$.

<u>Deuxième partie :</u> Etude des endomorphismes n'admettant qu'un nombre fini de sous-espaces stables.

1° Soit f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f.

a) On considère deux vecteurs a et b appartenant à $\operatorname{Ker}(f-\lambda e)$ et μ un nombre complexe. Vérifier que le sous-espace vectoriel de E engendré par $a+\mu b$, noté V_μ, est stable par f.

b) En déduire que si la dimension de $\operatorname{Ker}(f-\lambda e)$ est supérieure ou égale à 2 alors il existe une infinité de sous-espaces de E stables par f.

2° Soit f un endomorphisme de E admettant r valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$.

On suppose que chaque sous-espace propre de f est de dimension 1 et que le polynôme caractéristique de f, noté $P_f(X)$, est égal à :

$$P_f(X) = (-1)^n \prod_{j=1}^{r} (X-\lambda_j)^{k_j} \quad \text{où } r, k_1, k_2, \ldots, k_r \text{ sont des entiers naturels non nuls.}$$

Pour j élément de $\{1,2,\ldots,r\}$, on pose : $K_j = \operatorname{Ker}(f-\lambda_j e)^{k_j}$.

a) Prouver que E est égal à la somme directe de sous-espaces vectoriels suivante :
$\mathrm{E} = K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_r$.

b) Soit j un élément de $\{1,2,\ldots,r\}$. Démontrer que la dimension de K_j est égale à k_j.

c) Soit j un élément de $\{1,2,\ldots,r\}$. Prouver que K_j est stable par f.

En considérant $u_j = (f-\lambda_j e)_{|K_j}$, démontrer qu'il existe $1+k_j$ sous-espaces vectoriels de K_j stables par f et qu'il s'agit des $\operatorname{Ker}(f-\lambda_j e)^p$, p élément de $\{0,1,2,\ldots,k_j\}$.

d) Déterminer le nombre N de sous-espaces vectoriels de E stables par f.

Deuxième partie : Electricité

Etude d'un filtre passe-haut du premier ordre.

1. Filtre passif théorique.

1.1 La tension Ve est une tension sinusoïdale de fréquence f.
Déterminer la fonction de transfert du réseau sur la figure 1 : $\underline{H} = \underline{V_s} / \underline{V_e}$

1.2 Tracer le diagramme de Bode de ce filtre. On pose $w_0 = 1/RC$

1.3 Justifier la conclusion suivante :
Si le diagramme de Bode d'un filtre présente une pente de 20 dB par décade et un déphasage de $\pm \pi/2$, le montage est dérivateur.

1.4 Donner un montage utilisant un A-O (amplificateur opérationnel) monté en suiveur, permettant d'observer sans déformation V_s.

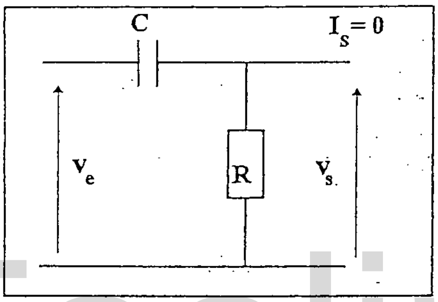
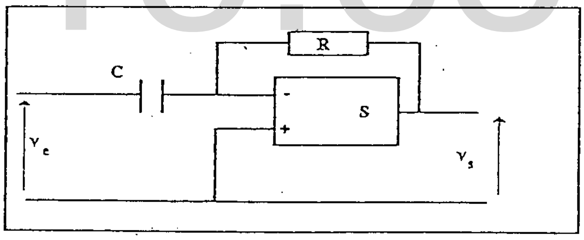


Figure 1

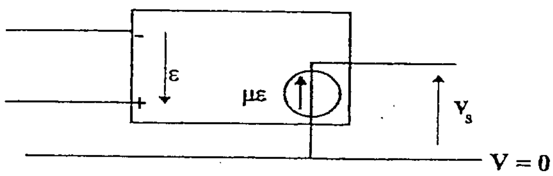
2. Montage dérivateur avec A-O idéal.
L'A-O fonctionne en régime linéaire.

Montrer que ce montage réalise une dérivation du signal d'entrée.

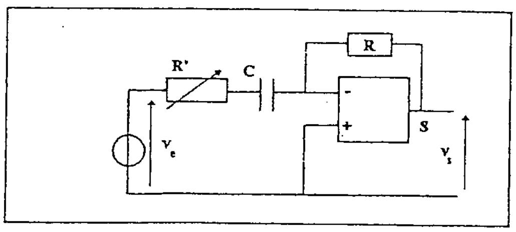


Un A-O idéal fonctionnant en régime linéaire est tel que $V_+ - V_- = e = 0$ et $I_+ = I_- = 0$.

3. Etude du montage avec A-O réel.
On modélise l'A-O réel par le schéma suivant : en particulier, le comportement de l'A-O en sortie est modélisé par un générateur de tension idéal de valeur $\mu\varepsilon$



On réalise le montage suivant:



3) On écarte la tige d'un angle θ_0, par rapport à sa position d'équilibre, et on l'abondonne sans vitesse initiale. La tige est alors animée d'un mouvement oscillatoire autour de sa position d'équilibre.

a) Déterminer la période du mouvement de la tige en fonction d'une intégrale (le calcul de l'intégrale n'est pas demandé).

b) Calculer la période du mouvement dans le cas des faibles oscillations. Faites l'application numérique.

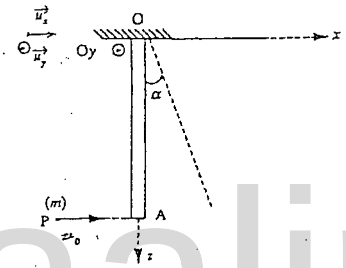
II – Choc élastique particule-tige.

La tige OA (de la partie I) initialement immobile (OA suivant Oz) est susceptible de tourner sans frottement autour de l'axe horizontal Oy.

Considérons le choc entre une particule P (masse m, vitesse initiale $\mathbf{V_0} = V_0\,\mathbf{U_x}$ et la tige en son extrémité A (figure 3).

On note $\mathbf{V} = V\mathbf{u_x}$ la vitesse de la particule et ω la vitesse angulaire de la tige, juste après le choc.

Figure 3



1) Montrer que le moment cinétique par rapport à O, dans le référentiel galiléen R (Ox, Oy, Oz), du système global (particule et tige) se conserve pendant la durée *très brève* τ du choc.

En déduire une relation entre V_0, V, ω, m, M et l.

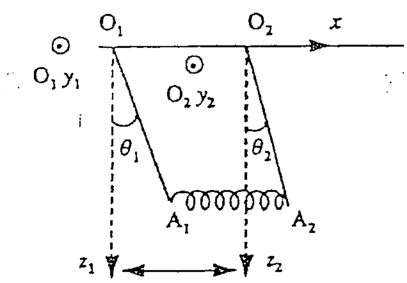
2) On considère un choc élastique particule-tige caractérisé par la conservation de l'énergie cinétique totale du système (particule et tige). On pose $\mu = \dfrac{m}{M}$

a) Exprimer V en fonction de V_0 et de μ.

b) Pour quelle valeur de μ l'énergie cinétique E_c de la tige (juste après le choc) est-elle maximale ?

III - Oscillateurs couplés.

Figure 4



Soient deux tiges identiques O_1A_1 et O_2A_2 (longueur l, masse M) dont les extrémités A_1 et A_2 sont reliées par un ressort de longueur au repos $l_0 = O_1O_2$ et de constante de raideur k.

Les tiges sont susceptibles de tourner sans frottement autour des axes horizontaux O_1y_1 et O_2y_2 (figure 4).

À l'instant t, on considère des petites déviations angulaires θ_1 et θ_2 des tiges par rapport à leurs directions d'équilibre :

$$\theta_1(t) = (O_1z_1, O_1A_1), \quad \theta_2(t) = (O_2z_2, O_2A_2).$$

On supposera que les petits déplacements latéraux de A_1 et A_2 restent horizontaux, dans le plan xO_1z_1.

1) Établir les équations différentielles « couplées » du 2ᵉ ordre dont $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ sont solutions.

2) On s'intéresse aux solutions du type : $\theta_1 = a_1\cos(\omega t - \varphi_1)$, $\theta_2 = a_2\cos(\omega t - \varphi_2)$.

a) Montrer qu'il existe deux pulsations possibles ω' et ω'' (appelées pulsations propres du système) que l'on exprimera en fonction de g, k, l et M.

b) En déduire la forme générale de $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.

Les extrémités A et B du dipôle peuvent être court-circuitées en plaçant l'interrupteur en position (2).

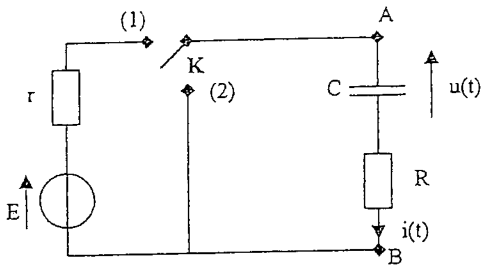


Figure 1

i(t) désigne l'intensité instantanée du courant dans le dipôle AB et u(t) la tension aux bornes du condensateur.

Le condensateur étant initialement déchargé, on place l'interrupteur K en position (1), à l'instant initial t = 0.

1) On s'intéresse à la charge du condensateur.

1.1. Déterminer l'équation différentielle liant u(t) et t.
1.2. En déduire la fonction u(t).
1.3. Qu'appelle-t-on constante de temps τ du circuit ?
1.4. Donner l'expression de l'intensité i(t).
1.5. Représenter graphiquement l'allure des fonctions u(t) et i(t).
1.6. *Application numérique.* $R = 1\ k\Omega$; $r = 100\ \Omega$; $C = 15\ \mu F$.

Donner un ordre de grandeur du temps de charge du condensateur.

1.7. Montrer qu'au bout d'un temps infini, l'énergie fournie par le générateur est également répartie entre le condensateur et la résistance (r+R).

2) Au bout d'un temps très long t', on bascule l'interrupteur en position (2).
2.1. Déterminer la fonction u(t).
2.2. Donner l'expression de i(t).
2.3. Représenter graphiquement ces deux fonctions.
2.4 Donner, sans démonstration, la forme sous laquelle le condensateur restitue, au cours de la décharge, l'énergie qu'il avait emmagasinée.

3) On place en série avec C une bobine d'inductance L et de résistance négligeable, le dipôle RLC ainsi obtenu est alimenté par un générateur de tension sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude E et de résistance interne négligeable.

3.1. Déterminer la valeur efficace du courant électrique qui traverse le dipôle en fonction de R, L, C, E et ω

3.2. Calculer la tension aux bornes du condensateur, en déduire la valeur maximale de sa valeur efficace.

43

ROYAUME DU MAROC

Ecole Hassania des Travaux Publics

Concours d'Accès en 1ère Année

Réservé aux Titulaires du DEUG

- Epreuve de Mathématiques
- Durée : 3h

Mercredi 08 Juillet 2009

L'épreuve comporte trois parties indépendantes.

1ère partie : Etude d'un skieur :

On étudie le mouvement d'un skieur descendant une piste selon la ligne de plus grande pente, faisant l'angle α avec l'horizontale.
L'air exerce une force de frottement supposée de la forme $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, où λ est un coefficient constant positif et $\vec{v}$ la vitesse du skieur.
On note $\vec{T}$ et $\vec{N}$ les composantes tangentielle et normale de la force de frottement exercée par la neige et f le coefficient de frottement solide.
On choisit comme origine de l'axe Ox de la ligne de plus grande pente la position initiale du skieur, supposé partir à l'instant initial avec une vitesse négligeable. On note Oy la normale à la piste dirigée vers le haut.

1. Donner l'unité SI de λ.
2. Calculer $\vec{T}$ et $\vec{N}$.
3. Calculer la vitesse $\vec{v}$ et la position x du skieur à chaque instant.
4. Montrer que le skieur atteint une vitesse limite $\vec{v}_l$ et calculer $\vec{v}$ en fonction de v_l .

   A.N. Calculer v_l avec $\lambda = 1$ S.I. , $f = 0{,}9$, $g = 10\ m/s^2$, $m = 80$ kg et $\alpha = 45°$

   (on prendra $\sqrt{2} = 1{,}4$)
5. Calculer littéralement et numériquement la date t_1 où le skieur a une vitesse égale à $\frac{v_l}{2}$.

   On prendra $Ln(2) = 0{,}7$.
6. Calculer littéralement les variations d'énergie cinétique et potentielle entre $t = 0$ et t_1, en fonction de m, g, t_1 , v_l et α.
7. En déduire le travail de la force de frottement $\vec{F}$ entre ces mêmes instants, en fonction de m et v_l . Retrouver directement ce résultat.

2ème partie : Lancement d'un satellite :

On considère un satellite artificiel de la Terre, de masse m constante. Il est supposé soumis à la seule action du champ de gravitation terrestre.

On considère la Terre comme une sphère de masse M, à répartition uniforme de masse, de rayon R et de centre O.
A l'instant choisi comme origine des temps, le satellite est situé en un point S_0 d'altitude h et est animé d'une vitesse $\vec{v}_0$, orthogonale à OS_0 .

1 .Préliminaire :
On rappelle la loi locale vérifiée par le champ de gravitation $\vec{g}$ en un point P quelconque:
$\mathrm{div}(\vec{g}) = -4\pi G \rho$,
où G est la constante de gravitation universelle et ρ la masse volumique en P.

1.a. Donner l'équivalent électrostatique de cette relation. Justifier l'analogie entre électrostatique et gravitation.

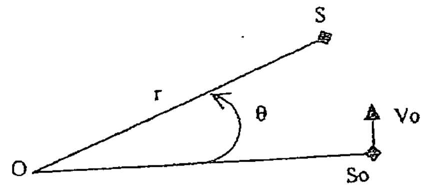
42

1.b. Montrer que le champ gravitationnel s'écrit $\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\overrightarrow{u_r}$ avec $\overrightarrow{u_r} = \frac{\vec{r}}{r}$ et $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$. En déduire le potentiel V crée par la terre en tout point P de l'espace. On rappelle que $\vec{g} = -\overrightarrow{grad}V$

2. Etude du mouvement du satellite :

2.a. Montrer que le mouvement du satellite est plan.

2.b. Dans le plan de la trajectoire, la position S du satellite est définie par ses coordonnées polaires: $r = OS$ et $\theta = (\overrightarrow{OS_0}, \overrightarrow{OS})$.



Montrer que $C = r^2\frac{d\theta}{dt}$ est constante et calculer sa valeur en fonction de R, h et v_0.

2.c. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au satellite. Montrer que l'équation s'intègre en : $\vec{v} = \frac{MG}{C}(\vec{u}_\theta + \vec{e})$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse et $\vec{e}$ est un vecteur constant que l'on calculera en fonction de v_0, C, G et M. On pose $e = \frac{\vec{e}.\vec{v}_0}{v_0}$.

2.d. En projetant $\vec{v}$ sur $\vec{u}_\theta$, en déduire l'équation de la trajectoire sous la forme :

$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$ et calculer p et θ_0.

3.a. Calculer la vitesse de libération v_l à l'altitude h et donner, selon la valeur de v_0, la nature de la trajectoire. Calculer la valeur v_C de v_0 correspondant à une trajectoire circulaire d'altitude h.

3.b. Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m et calculer sa valeur en fonction de e, m G, M et C. Retrouver la nature de la trajectoire en fonction des valeurs de E_m.

3.c. Dans le cas d'une trajectoire elliptique, on note a le demi grand axe. Calculer E_m en fonction de a, G, m et M.

4.a. On suppose $v_0 < v_l$. A quelle condition, la position initiale S_0 du satellite est-elle le périgée de la trajectoire ? Dans ce cas, déterminer la position A de l'apogée et la vitesse en ce point.

4.b. En A, on modifie quasi instantanément la vitesse du satellite pour que sa trajectoire soit désormais circulaire. Calculer la vitesse en A sur la nouvelle orbite circulaire et la variation relative de vitesse.

3ème partie : Electricité

Réponse d'un circuit R-C à un échelon de tension

Un dipôle AB est constitué d'un résistor de résistance R en série avec un condensateur de capacité C (figure 1).

Lorsque l'interrupteur K est en position (1), le dipôle est alimenté par une source de tension de f.é.m. E constante et de résistance r.

Question préliminaire . - Rappeler les propriétés d'un amplificateur opérationnel idéal

- Justifier le fonctionnement en régime linéaire de l'amplificateur opérationnel dans le montage ci-dessus.

1/ Déterminer l'équation différentielle (1) vérifiée par $v_s(t)$ en fonction de $v_e(t)$, R, R' et C.

2/ Réponse à un signal d'entrée sinusoïdal

Le signal d'entrée du filtre est un signal sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude V_e. On a ainsi :
$v_e(t) = V_e.\cos(\omega.t)$

2.1/ Caractère intégrateur

A quelle condition portant sur R', C et ω, le montage précédent est- il intégrateur ?
Déterminer dans ce cas la réponse $v_s(t)$ du filtre en fonction du temps. On ne fera pas intervenir de constante d'intégration.

2.2/ Condition de linéarité du montage

A quelle condition portant sur R', C et ω, la tension de sortie est-elle proportionnelle à la tension d'entrée ? Montrer que le montage est alors un amplificateur inverseur dont on précisera le gain.

3/ Réponse à un échelon de tension

On se place dans le cas où la tension d'entrée $v_e(t)$ est un échelon de tension tel que :
$v_e(t) = 0$ pour $t < 0$,
$v_e(t) = E$ pour $t \geq 0$ où E représente une tension constante.

3.1/ Cas général

Le condensateur étant initialement déchargé à $t = 0$, déterminer l'expression de $v_s(t)$ pour $t \geq 0$ dans le cas général où la tension $v_s(t)$ vérifie l'équation différentielle (1).

3.2/ Caractère intégrateur

En réalisant un développement limité au premier ordre en $\frac{t}{R'C}$ de l'expression obtenue dans la question précédente, déterminer l'expression de la fonction $v_s(t)$. Montrer qu'alors le circuit précédent est intégrateur. A quelle condition portant sur R', C et t le résultat précédent est-il valable ?
Quelle valeur la tension $v_s(t)$ ne pourra-t-elle pas dépasser ?

4- On réalise un filtre en plaçant un condensateur de capacité C en série avec la résistance R.
Le signal d'entrée est sinusoidal de pulsation ω .

4-1 Déterminer qualitativement la nature du filtre réalisé.

4-2 Déterminer la fonction de transfert du filtre.

4-3 Représenter son diagramme de Bode.

ROYAUME DU MAROC

Ecole Hassania des Travaux Publics

Concours d'Accès en 1ère Année

Réservé aux Titulaires du DEUG

- Epreuve de Physique
- Durée : 3h

Mercredi 08 Juillet 2009

2.5/ Amortissement par frottement fluide

Nous nous plaçons dans le cas où l'objet A est soumis à un frottement fluide proportionnel à sa vitesse. Soit h le coefficient de proportionnalité entre la force de frottement $\bar{f}$ et la vitesse $\bar{v}$ de l'objet A. La force de frottement s'écrit donc sous la forme $\bar{f} = -h.\bar{v}$.

Etablir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ.

Les frottements sont supposés suffisamment faibles pour que le régime d'oscillations de l'objet A soit pseudo-périodique.

Déterminer alors, **dans le cas des petites oscillations**, la solution $\theta(t)$ de l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ lorsque l'objet A est abandonné sans vitesse initiale d'une position repérée par l'angle θ_0.
Donner, dans ce cas, l'allure de la représentation graphique de $\theta(t)$ en fonction du temps.

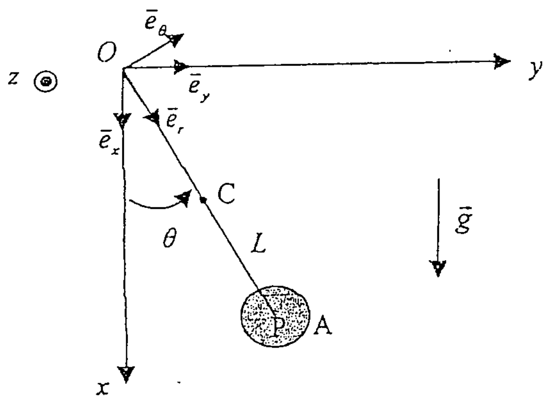
Deuxième partie : Rotation d'un pendule composé autour d'un axe fixe

On considère un pendule composé constitué :
- d'un disque homogène A, de masse m, de rayon R, de centre P ;
- d'une tige OP homogène de masse m', de longueur L, de milieu C.

Le disque et la tige sont rigidement liés l'un à l'autre et contenus dans le plan *(Oxy)*.
L'ensemble constitué par le disque A et la tige OP peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical *(Oxy)*, autour de l'axe horizontal *(Oz)*.

La position du pendule précédent est repérée par l'angle θ que fait la tige avec la verticale.
On négligera tout frottement.
L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

L'ensemble ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\bar{g}$ tel que $\bar{g} = g.\bar{e}_x$.



1- Moments d'inertie :

1-1 Montrer que le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe horizontal Oz est $I_0 = m'\dfrac{L^2}{3}$.

1-2 Montrer également que le moment d'inertie du disque A par rapport à Oz est $J_0 = m\dfrac{R^2}{2} + mL^2$.

1-3 En déduire le moment d'inertie J du système {disque A + tige OP}.

2- Etude dynamique

2-1 Calculer le moment cinétique en O du système {disque A + tige OP} dans le référentiel d'étude.

2-2 En appliquant le théorème du moment cinétique au système considéré, déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ.

2-3 A l'instant t = 0, le système est abandonnée sans vitesse initiale d'une position repérée par θ_1 considéré assez petit. Montrer que le système effectue des oscillations harmoniques de période T_1 que l'on exprimera en fonction de J, L, m, m' et g.

2-4 Représenter le portrait de phase du mouvement ($\dfrac{d\theta}{dt}$ en fonction de θ)

3- Etude énergétique.

3-1 Calculer l'énergie cinétique du système étudié dans le référentiel d'étude.

3-2 Calculer l'énergie potentielle du système étudié.

3-3 Montrer que l'énergie mécanique du système est conservée. Retrouver l'équation différentielle du mouvement.

4- Cas particulier

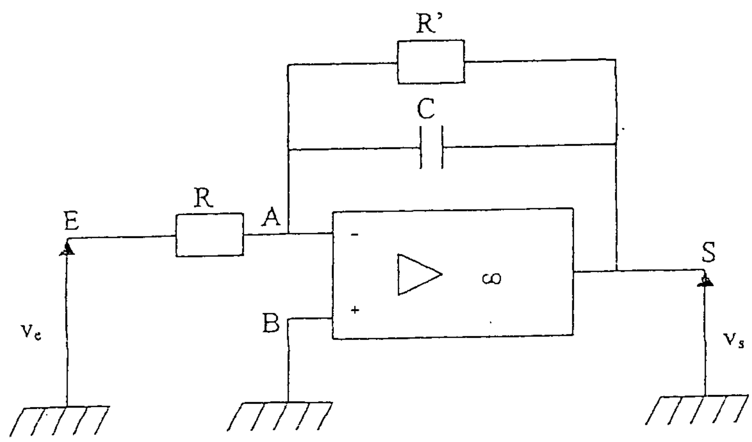
On considère les hypothèses simplificatrices suivantes :

- la masse m' de la tige OP est négligeable devant la masse m du disque,
- le disque A est de très petite taille de telle sorte que l'on peut le considérer comme ponctuel.

En détaillant clairement les simplifications induites par les hypothèses précédentes, indiquer ce que devient l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ au cours du temps.
Comparer le cas présent au cas du pendule simple de la première partie.

Partie électricité

On considère le montage ci-dessous dans lequel l'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire.



Www.TaalimPro.com

L'épreuve comporte une partie mécanique et une partie électricité

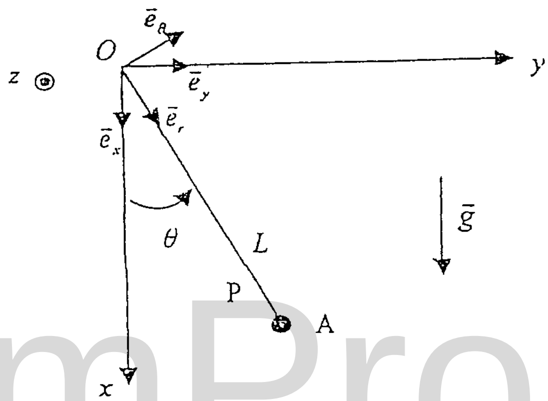
Partie mécanique

Première partie : Oscillations d'un pendule simple

Un objet ponctuel A de masse m est suspendu à l'extrémité P d'un fil OP de masse négligeable et de longueur L. Il peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical *(Oxy)*, autour de l'axe horizontal *(Oz)*.
La position de l'objet A est repérée par l'angle θ que fait le fil avec la verticale.
L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Les frottements au niveau de l'axe de rotation seront négligés dans toutes les questions.
Les frottements de l'air seront négligés dans toutes les questions hormis dans les question 2.5 et 3.5 où l'on envisagera un amortissement par frottement fluide.

L'ensemble ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\vec{g}$ tel que $\vec{g} = g.\vec{e}_x$.



1 – Etude dynamique : équation différentielle du mouvement

1.1/ Faire le bilan des forces appliquées à l'objet A.
En appliquant le théorème du moment cinétique en coordonnées cylindriques par rapport au point O, déterminer l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ.

1.2/ Déterminer à l'aide de l'équation précédente la ou les positions d'équilibre du système. Etudier, en justifiant les résultats, la stabilité de ces positions.

2 – Petites oscillations

2.1/ A l'instant $t = 0$, l'objet A est abandonné sans vitesse initiale d'une position repérée par l'angle θ_0. On se place dans le cas où l'angle θ_0 est petit. Montrer que le système constitue alors un oscillateur harmonique.
En déduire la pulsation ω_0 et la période T_0 des petites oscillations du système autour de sa position d'équilibre stable. On exprimera ω_0 et T_0 en fonction de g et L.

2.2/ Compte tenu des conditions initiales, déterminer l'expression $\theta(t)$ de l'angle θ en fonction du temps pour $t \geq 0$.

2.3/ Quelle est la valeur maximale v_{max} de la vitesse de l'objet A au cours de son mouvement ? On exprimera v_{max} en fonction de θ_0, L et g.

2.4/ Tracer la représentation graphique de θ en fonction du temps.

ROYAUME DU MAROC

Ecole Hassania des Travaux Publics

Concours d'Accès en 1ère Année

Réservé aux Titulaires du DEUG

- Epreuve de Physique
- Durée : 3h

Lundi 21 Juillet 2008

b. Pour cette question, on pourra utiliser librement le résultat suivant : pour tout réel r strictement supérieur à -1, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^r |\ln t| dt$ est convergente

Montrer avec soin que la fonction Γ est dérivable sur $[a,b]$ et déterminer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

La fonction Γ est donc dérivable sur $]0,+\infty[$. On montre de la même façon et **on admet** que Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

5. Soit p un entier naturel, écrire **sans justifier** $\Gamma^{(p)}(x)$ sous forme d'intégrale. ($\Gamma^{(p)}$ désigne la dérivée p-ième de Γ).

II. La fonction ψ d'Euler

On montre sans difficulté, que pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x) > 0$. On peut donc définir sur $]0,+\infty[$, la fonction ψ d'Euler par $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

Soit $\alpha \in]0,1[$.

6. Relation entre ψ et des sommes.
   a. Quelle relation différentielle relie ψ et $\ln \Gamma$? En déduire que
   $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ \psi(x+1) - \psi(x) = \dfrac{1}{x}$ (on pourra utiliser $(\mathcal{F})$).
   b. Soit n un entier naturel non nul, déterminer en fonction de n et de α, quatre réels u_1, v_1, u_2, v_2 tels que
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-\alpha} = \psi(u_1) - \psi(v_1) \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\alpha} = \psi(u_2) - \psi(v_2).$$

7. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $R(X) = \dfrac{1}{X^2 - \alpha^2}$ puis en déduire que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha}\big(\psi(1+\alpha) - \psi(1-\alpha)\big) + \frac{1}{2\alpha}\big(\psi(n+1-\alpha) - \psi(n+1+\alpha)\big).$$

8. Enoncer avec soin l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) g(t) dt$, puis l'utiliser pour montrer que $(\Gamma')^2 \le \Gamma'' \times \Gamma$ où Γ'' désigne la dérivée seconde de Γ. En déduire que la fonction ψ est croissante.

9. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a
$0 \le \psi(n+1+\alpha) - \psi(n+1-\alpha) \le \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n}$ (penser que $\alpha \in]0,1[$).
Conclure que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{\psi(1+\alpha) - \psi(1-\alpha)}{2\alpha}$.

III. Etude de la fonction Gamma

10. Utiliser $(\mathcal{F})$ pour déterminer un équivalent de Γ au voisinage de 0_+. En déduire la limite de Γ en 0.

11. a. Justifier que Γ' est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
    b. Justifier l'existence d'un réel $c \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$. En déduire le signe de Γ' et enfin, les variations de Γ.

12. a. Déterminer la limite de Γ en $+\infty$. On pourra utiliser des résultats précédents.
    b. Dessiner l'allure du graphe de Γ. On représentera, s'il y a lieu, les asymptotes et les tangentes horizontales.

Exercice 1 Etude d'un endomorphisme sur l'espace des polynômes

n désigne un entier naturel, on note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à n.
On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$, l'application f : $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$ par :
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f(P(X)) = X(P(X) - P(X-1))$.

13.*Résultats préliminaires*

a. Calculer $f(1), f(X), f(X^2)$.

b. Si $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$, avec $a_n \neq 0$, quel est le terme de plus haut degré du polynôme $P(X-1)$?

c. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(X) = P(X-1)$. On pose $Q(X) = P(X) - P(0)$. Montrer que $Q(X)$ est un polynôme constant que l'on précisera.

14 Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

15 Déterminer le noyau de f, en déduire la dimension de l'image de f.

16 Dans cette question **uniquement**, on suppose que $n = 2$.

a. Quelle est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? Ecrire la matrice de l'endomorphisme f dans cette base canonique.

b. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

17 *Etude de la diagonalisation dans le cas général*

Pour tout entier naturel k, on définit les polynômes P_k par :
$P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$ et pour tout $k \geq 2$, $P_k(X) = X(1-X)(2-X)\ldots(k-1-X)$.

a. Montrer que la famille $(P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Soit k un entier naturel, déterminer un nombre réel c_k tel que $f(P_k) = c_k P_k$.

c. Déterminer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 2 Résolution d'une équation différentielle

18.On note (E) l'équation différentielle $|x|y' + (x-1)y = x^2$.

a. Résoudre (E) sur $]0;+\infty[$.

b. Sachant que les solutions de (E) sur $]-\infty;0[$ sont les fonctions $x \mapsto x + 2 + \frac{2}{x} + B\frac{e^x}{x}$, où $B \in \mathbb{R}$, existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$? Si oui, les expliciter.

Fin de l'énoncé

Www.TaalimPro.com

Les calculatrices sont autorisées

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre

* * *

Problème

Autour des fonctions Γ et ψ d'Euler

Un des objectifs du problème qui comporte trois paragraphes est de démontrer la formule correspondante suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2} = \frac{\psi(1+\alpha)-\psi(1-\alpha)}{2\alpha}$$

où $\alpha \in]0,1[$ et ψ est une fonction « d'Euler » que l'on définira ultérieurement.

Dans le paragraphe I, on définit la fonction Gamma d'Euler et on en montre quelques propriétés que l'on utilisera dans le paragraphe II pour définir la fonction ψ d'Euler et démontrer la formule ci-dessus.

Enfin, dans le paragraphe III, on étudie plus en détail la fonction Gamma, dans le but de la représenter graphiquement.

Les paragraphes II et III sont indépendants mais utilisent des résultats du paragraphe I.

1. Questions préliminaires

a. Soit $\alpha \in]0,1[$, justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2-\alpha^2}$.

b. Pour quelle(s) valeur(s) de β l'intégrale $\int_0^1 t^{\beta}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ? On ne demande pas de justifier.

I. La fonction Gamma d'Euler

2. Soit x un réel strictement positif, justifier l'existence d'un réel A strictement positif, tel que pour tout réel t strictement supérieur à A, on ait $\mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} < \frac{1}{t^2}$, puis montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

On peut donc définir sur $]0,+\infty[$, la fonction Gamma d'Euler notée Γ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

3. Calculer $\Gamma(1)$ puis montrer la relation fondamentale suivante notée $(\mathcal{F})$:

$\forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad (\mathcal{F})$.

En déduire $\Gamma(2)$. Soit n un entier naturel non nul, donner une expression simple de $\Gamma(n)$.

4. *Dérivabilité de la fonction Gamma*

Soient a et b des réels tels que $0 < a < b$.

a. Pour tout réel t strictement positif, on définit sur $]0,+\infty[$, la fonction h_t par $h_t(x) = t^{x-1}$.

Déterminer les variations de h_t. On pourra discuter selon la valeur de t.

En déduire que $\forall x \in [a,b], \forall t \in]0,+\infty[,\ 0 \leq t^{x-1} \leq t^{a-1} + t^{b-1}$.

3.1 Calculer la fonction de transfert : $\underline{H} = \underline{V_s} / \underline{V_e}$ avec un amplificateur A-O réel caractérisé par

$\mu = \mu_0 / (1+jf/f_0)$.

On définit : la fréquence de coupure à gain nul $f_1 = \mu_0 f_0$; et $f2 = 1/ 2\pi RC$

3.2 En admettant que $R >> R'$, $f_2 >> f_0$ et $\mu_0 >> 1$, montrer que $\underline{H}$ se met sous la forme :

$$\underline{H} = Ajx / (1 + j\,x/Q - x^2)$$

avec $x = f / f_c$, $A = -f_c/f_2$; $f_c{}^2 = f_1 f_2$; $Q = 1 / f_c(R'/Rf_2 + 1/f_1)$

3.3 Application numérique :

$f_1 = 1$ Mhz ; $R = 10$ k W ; $C = 100$ nF ; $R' = 50$ W ; Calculer f_c, Q, et A.

3.4 Donner l'allure du diagramme de Bode en amplitude : $G_{dB} = 20 \log |\underline{H}|$ en fonction de log x

3.5 Interpréter le fait que le montage n'est pas dérivateur aux fréquences voisines de 10 kHz.

3.6 Le signal d'entrée est un signal triangulaire symétrique de fréquence f = 100 Hz. On constate que le signal de sortie n'est pas tout à fait un signal créneau mais qu'il s'y superpose des ondulations de fréquence voisine de 10 kHz.

Justifier ces observations à partir du diagramme de Bode et de la décomposition de Fourier d'un signal triangulaire.

ROYAUME DU MAROC

Ecole Hassania des Travaux Publics

Concours d'Accès en 1ère Année

Réservé aux Titulaires du DEUG

- Epreuve de Mathématiques
- Durée : 3h

Lundi 21 Juillet 2008

Epreuve de Mathématiques

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice I

1. On considère la fonction g de variable réelle définie par : $g(u) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(t\,u)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer, pour tout $u > 1$, un réel α_u dans $]0,1[$ tel que : $\displaystyle\int_{\alpha_u}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{u}}$.
   (c) Dériver $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et intégrer par parties $\displaystyle\int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(t\,u)\,\mathrm{d}t$ pour en déduire que :
   $$\forall u > 1,\ |g(u)| \leqslant \frac{3}{\sqrt{u}}.$$

2. Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à $]-\pi,\pi]$ est représentée dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par le demi-cercle de centre O, de rayon π et d'ordonnées positives.
   (a) Pour tout $x \in\,]-\pi,\pi]$, donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
   (b) Énoncer le théorème de DIRICHLET. S'applique-t-il à la fonction f ?

3. (a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de FOURIER trigonométriques de f notés a_n et b_n.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{2}{n} g(\pi\,n)$.

4. (a) Établir la convergence normale de la série de FOURIER de f. Cela contredit-il le 2°b ?
   (b) Montrer à l'aide du théorème de PARSEVAL que la série de FOURIER de f converge vers f.

Exercice II

Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \neq 0$, ainsi que l'équation :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y). \qquad (\mathscr{E})$$

1. (a) Montrer qu'une telle fonction f vérifie l'équation $(\mathscr{E})$ si et seulement si il existe une fonction réelle a, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telle que :
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x)\,f(x,y).$$
   (b) En déduire que les solutions de $(\mathscr{E})$ ne s'annulant pas sont exactement les fonctions de la forme $(x,y) \mapsto \varphi(x)\,\psi(y)$, où φ et ψ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas. Pour une telle solution f de $(\mathscr{E})$, y-a-t-il unicité du couple (φ,ψ) ?
   (c) Soient g et h deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ et telles que $g(0) = h(0)$.
   Montrer qu'il existe une et une seule solution f de $(\mathscr{E})$ ne s'annulant pas et telle que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x,0) = g(x) \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R},\ f(0,y) = h(y).$$

ROYAUME DU MAROC

Ecole Hassania des Travaux Publics

Concours d'Accès en 1ère Année

Réservé aux Titulaires du DEUG

- Epreuve de Mathématiques
- Durée : 3h

Jeudi 22 Juillet 2010

I.4 Soit K un second sous-espace vectoriel de F, r le projecteur orthogonal de F sur K, λ une valeur propre non nulle de $p \circ r$ et u un vecteur propre associé.

a) Montrer que u est élément de H et que $r(u) - \lambda u$ est élément de $H^{\perp}$.

b) Établir l'égalité : $\lambda ||u||^2 = ||r(u)||^2$.

c) En déduire que toutes les valeurs propres de $p \circ r$ sont dans le segment $[0, 1]$.

I.5 On suppose dans cette question que p et r commutent.

a) Montrer que $p \circ r$ est un projecteur orthogonal.

b) Dans le cas où $p \circ r$ est non nul, déterminer son spectre.

c) Montrer que : $\mathrm{Ker}\,(p \circ r) = \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, r$ et $\mathrm{Im}\,(p \circ r) = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, r$.

I.6 On pose $m = \dim F$ et on choisit une base orthonormale de F telle que les matrices de p et r dans cette base soient respectivement les matrices décomposées en blocs :

$$P = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad R = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où I_k est la matrice unité d'ordre k, A une matrice carrée d'ordre k et D une matrice carrée d'ordre $m - k$.

a) Montrer que les matrices A, B, C, D vérifient les relations :

$$A^2 + BC = A \ , \ AB + BD = B \ , \ CB + D^2 = D \ , \ {}^tA = A \ , \ {}^tB = C \ , \ {}^tD = D$$

b) Montrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

i) Le spectre de $p \circ r$ est inclus dans $\{0, 1\}$.

ii) ${}^tCC = 0$.

iii) $C = 0$.

iv) p et r commutent.

PARTIE II

Dans cette partie, sont donnés un élément f de $\mathcal{L}(E, F)$ et un élément v de F.

II.1 En considérant la projection orthogonale de v sur l'image de f, montrer qu'il existe un élément x_0 de E tel que :

$$||f(x_0) - v|| = \min_{x \in E} ||f(x) - v||$$

Dans la suite x_0 sera appelée une *pseudo-solution* de l'équation :

$$f(x) = v \tag{$*$}$$

II.2 Montrer que si f est injective, alors l'équation $(*)$ admet une pseudo-solution unique.

II.3 Montrer que x_0 est pseudo-solution de l'équation $(*)$ si et seulement si pour tout x appartenant à E : $(f(x) \mid f(x_0) - v) = 0$.

II.4 Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases orthonormales de E et F respectivement. On appelle A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, V la matrice de v dans $\mathcal{C}$ et X_0 celle de x_0 dans $\mathcal{B}$. Ecrire sous forme matricielle l'équation $(f(x) \mid f(x_0) - v) = 0$ et en déduire que x_0 est pseudo-solution de l'équation $(*)$ si et seulement si :

$${}^tAAX_0 = {}^tAV$$

II.5 Exemple : Dans cette question, on prend $E = F = \mathbb{R}^3$ munis du produit scalaire usuel. Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, les matrices de f et v sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les pseudo-solutions de l'équation $f(x) = v$.

2. Dans cette question, f désigne une solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}^2$, strictement positive.
   (a) Montrer que f présente en (x_0, y_0) un maximum local si et seulement si les fonctions $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x, y_0)$ présentent respectivement en x_0 et en y_0 un maximum local.
   (b) En déduire que l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ où f présente un maximum local est de la forme $A \times B$, où A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ à préciser.

3. Soit maintenant la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x, y) = (xy)^3 + |xy|^3$.
   (a) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. (On pourra écrire F comme une composée).
   (b) Démontrer que F vérifie l'équation $(\mathscr{E})$.
   (c) Montrer qu'il n'existe pas de fonctions φ, ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x, y) = \varphi(x)\,\psi(y).$$

Problème

Notations et objectifs

Dans tout le problème, E et F désignent deux espaces vectoriels euclidiens de dimensions au moins égales à 2. Pour chacun de ces espaces, le produit scalaire de deux vecteurs x et y et la norme d'un vecteur x sont respectivement notés $(x \mid y)$ et $||x||$.

$\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

La matrice transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

Les candidats pourront utiliser sans le redémontrer qu'un projecteur d'un espace euclidien est un projecteur orthogonal si et seulement si il est symétrique.

L'objet de la première partie est de caractériser la composée de deux projections orthogonales qui commutent. La seconde partie propose une résolution approchée d'une équation linéaire n'ayant pas de solution en introduisant la notion de *pseudo-solution* et la troisième partie généralise la notion d'inverse d'une matrice carrée à une matrice rectangulaire en introduisant la notion de *pseudo-inverse*.

PARTIE I

I.1 Soit x et y deux vecteurs de E, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, X et Y les matrices respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que : $(x \mid y) = {}^tXY = {}^tYX$.

I.2 Soit H un sous-espace vectoriel de F tel que $1 \leqslant \dim H < \dim F$. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ une base orthonormale de H et p le projecteur orthogonal de F sur H.

a) Pour tout $z \in F$, exprimer (sans justification) $p(z)$ dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$.

b) Soit $\mathcal{C}$ une base orthonormale de F. Relativement à cette base $\mathcal{C}$, on note Z la matrice d'un vecteur z de F, $M(p)$ la matrice de p et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, E_i la matrice de e_i.

i) Montrer que pour tout $z \in F$, $M(p)Z = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} E_i\,{}^tE_i Z$.

ii) En déduire $M(p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} E_i\,{}^tE_i$.

c) Montrer que pour tout $z \in F$, $||p(z)|| \leqslant ||z||$.

I.3 Exemple : On note M la matrice définie par

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire usuel, d'un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^4$.

b) Donner une base orthonormale du noyau et une base orthonormale de l'image de ce projecteur.

II.6 Application : n désignant un entier supérieur ou égal à deux, on considère trois éléments $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et on souhaite trouver deux réels λ et μ tels que la somme $\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2$ soit minimale.

a) Montrer que ce problème équivaut à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $(*)$: $f(x) = v$ où f est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$. Préciser le vecteur v et donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$.

b) Comment doit-on choisir a et b pour que l'application f soit injective ?

c) Lorsque cette dernière condition est réalisée, donner la solution du problème posé en exprimant λ et μ à l'aide de produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$.

PARTIE III

Dans cette partie, f désigne toujours un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

III.1 a) Soit y un élément de F. Montrer qu'il existe deux vecteurs x et y' tels que :

$$y = f(x) + y' \ , \ (x, y') \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp} \times (\operatorname{Im} f)^{\perp}$$

b) Montrer qu'un tel couple (x, y') est unique. On peut alors définir l'application g de F vers E qui à y fait correspondre x.

c) Montrer que l'application g est linéaire. g sera appelée l'application *pseudo inverse* de f.

III.2 Déterminer le noyau et l'image de g.

III.3 a) Montrer que $g \circ f$ est le projecteur orthogonal de E sur $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

b) Montrer que $f \circ g$ est le projecteur orthogonal de F sur $\operatorname{Im} f$.

III.4 Premier exemple : On prend $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$ munis de leur produit scalaire usuel. La matrice de f relativement aux bases canoniques est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de g relativement aux bases canoniques.

III.5 Dans cette question, on suppose que $E = F$ et que f est un endomorphisme symétrique.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$ et $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

b) Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g. (On pourra discuter suivant que la valeur propre associée est nulle ou non).

c) En déduire que g est aussi un endomorphisme symétrique de E.

III.6 Deuxième exemple : On prend $E = F = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. La matrice de f relativement à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

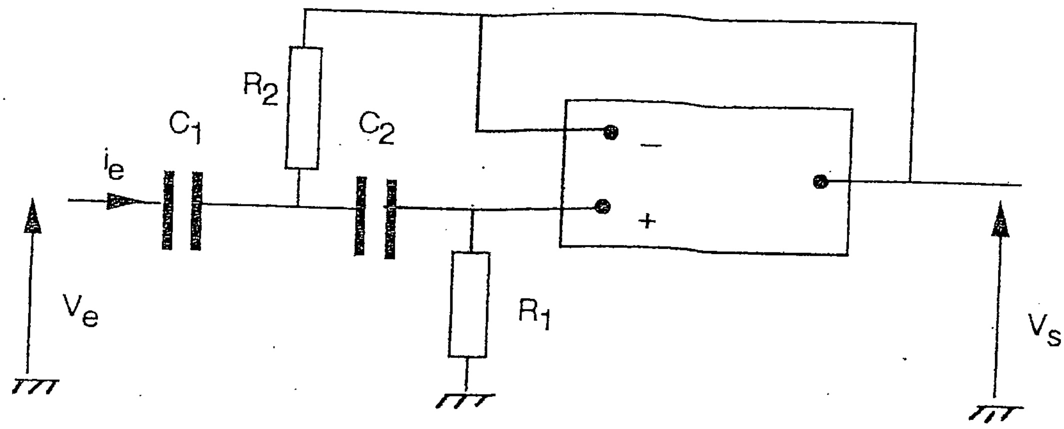
Déterminer la matrice de g relativement à la base canonique.

Fin de l'énoncé

L'épreuve comporte trois parties indépendantes

Première partie : Etude d'un filtre.

On considère le montage suivant où tous les composants sont supposés idéaux, l'A.O. fonctionnant en régime linéaire :



1) Déterminer la fonction de transfert $\dfrac{V_s}{V_e} = H(j\omega)$

2) Dans toute la suite du problème, on prend $C_1 = C_2 = C$. Mettre H sous la forme :

$$H = \frac{x^2}{1 + x^2 + \frac{x}{Q}} \quad \text{en posant } x = \frac{j\omega}{\omega_0}$$

On exprimera ω_0 et Q en fonction des paramètres R_1, R_2 et C.

3) Quel est le type de ce filtre ?

4) Quelle valeur faut-il donner à Q pour que ω_0 soit la fréquence de coupure à – 3dB du filtre ?

5) Calculer la valeur de R_1 et R_2 pour obtenir un filtre de fréquence $f_0 = 1000$ Hz, de facteur $Q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, avec $C = 0{,}1\ \mu F$.

6) Représenter les diagrammes de Bode d'amplitude et de phase du filtre. On précisera les valeurs du gain et de la phase pour $\omega = \omega_0$.

7) Déterminer l'impédance d'entrée du montage, définie par $Z_e = \frac{V_e}{i_e}$, On exprimera Z_e en fonction de R_1, Q et x et on donnera sa valeur particulière pour $\omega = \omega_0$ et $Q = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Comment modifier le montage pour le rendre "idéal" ?

8) On place derrière ce filtre un deuxième filtre identique au premier. Comment est modifiée la fonction de transfert ? Quel est l'intérêt de ce deuxième montage?

ROYAUME DU MAROC

Ecole Hassania des Travaux Publics

Concours d'Accès en 1ère Année

Réservé aux Titulaires du DEUG

- Epreuve de Physique
- Durée : 3h

Jeudi 22 Juillet 2010

49

TROISIEME PARTIE : Mécanique

1- Une masse ponctuelle m est placé à l'extrémité A d'une tige de masse négligeable, de longueur l = OA, articulée en un point fixe O et mobile dans un plan vertical ; un ressort spiral exerce sur cette tige un couple de rappel $-C\theta$, *ou* θ désigne l'angle que fait la tige avec la verticale ascendante Oz (figure 1). On désigne par g l'intensité du champ de pesanteur. On néglige toute sorte de frottements

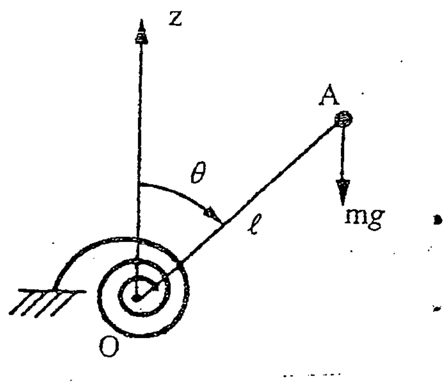


figure 1

1-1. Déterminer l'expression de l'énergie mécanique E du système, montrer que E est une constante du mouvement

1-2. En déduire l'équation différentielle du mouvement.

1-3. En appliquant le théorème du moment cinétique, retrouver l'équation du mouvement.

1-4. A quelle condition la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable ?

1-5. Cette condition étant réalisée, calculer la période T des petites oscillations autour de $\theta = 0$, on écrira T sous forme :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{A-g}}$$ Donner l'expression de A.

1-6. Calculer la variation relative de ΔT/T si g varie de Δg.

1-7. Donner l'expression de la période T_0 d'un pendule simple de même longueur l. En déduire la variation relative de T_0 si g varie de Δg.

2- Système masse – ressort

Un ressort à spires jointives de raideur k, de masse négligeable et de longueur à vide l_0 est suspendu verticalement par son extrémité A (figure 2). On donne g l'intensité du champ de pesanteur.

A l'autre extrémité on accroche une masse ponctuelle m. Le ressort s'allonge de h.

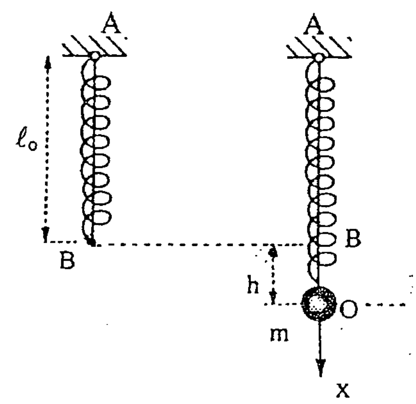


Figure 2

2-1. Exprimer h en fonction de g, m et k.

2-2. Application numérique : k = 33 $N.m^{-1}$ et m = 0,200 kg. On mesure h = 59,5 +0,1 mm, calculer g et Δg sachant que m et k sont connues aux millièmes prés.

2-3. A partir de sa position d'équilibre O prise comme origine, on écarte la masse m d'une quantité a et on l'abandonne sans vitesse initiale à t = 0.

2-3-1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation du mouvement de m, on notera ω_0 la pulsation des oscillations.

2-3-2. Exprimer g en fonction de h et $\omega_0{}^2$.

2-3-3. Application numérique : pour m = 0,200 kg, on compte 113 oscillations par minute ; calculer g.

2-3-4. Représenter le portrait de phase de l'oscillateur $\dot{x}$ = f(x).

2-3-5. Donner l'allure du portait de phase si l'oscillateur est soumis aux frottements fluides modélisées par f = -hv (v =$\dot{x}$ étant la vitesse de m)

DEUXIEME PARTIE : Electromagnétisme

1- Electrostatique :

1-1. Rappeler les équations locales vérifiées par le champ électrostatique $\vec{E}$(M), en présence des charges.

1-2.

1-2-1. A partir de l'équation de Maxwell–Gauss, retrouver la forme intégrale du théorème de Gauss.

1–2–2. Application : On considère un fil de longueur infinie portant une densité de charge linéique λ uniforme

a– Montrer que le champ $\vec{E}$(M) est radial.

b– Calculer E(r) en fonction de r (r étant la distance entre M et le fil)

1–3.

1–3–1. Rappeler les propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique.

1–3–2. Application : On considère une sphère métallique de rayon a portée au potentiel V_0.

a– Calculer la charge Q portée par la sphère, cette charge est–elle surfacique ou volumique ?

b– En déduire la capacité de la sphère.

c- Calculer le champ électrostatique $\vec{E}$(r), crée par la sphère, en un point de l'espace.

d- En déduire le champ électrostatique au voisinage de la sphère.

e- Retrouver le théorème de Coulomb.

f- Calculer l'énergie électrostatique de la sphère.

2- Régime variable :

2-1. Rappeler les quatre équations de Maxwell qui régissent le champ électromagnétique ($\vec{E}$(M, t) ;$\vec{B}$ (M, t)) en présence des charges et de courants

2-2. A partir des équations de Maxwell, établir:

2-2-1. L'équation de conservation de la charge électrique.

2-2-2. L'équation de conservation de l'énergie électromagnétique.

2-3. Déterminer les équations aux dérivées partielles vérifiées par le champ électromagnétique dans le vide.

2-4. Définir le potentiel électromagnétique ($\vec{A}$, V) associé au champ ($\vec{E}$(M, t) ;$\vec{B}$ (M, t))

2-5. Le potentiel électromagnétique ($\vec{A}$, V) est-il unique ? Quel en est l'intérêt ?

2-6. En rappelant la jauge de Lorentz établir les deux équations aux dérivées partielles vérifiées par V et $\vec{A}$

2-7. Donner la solution dite solution des potentiels retardés.

Epreuve de MATHEMATIQUES

Problème I

Dans tout le problème $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel ≥ 2 , E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n , u un endomorphisme de E , χ_u le polynome caractéristique de u , π_u le polynome minimal de u ; la matrice identité se notera I_p .

L'objet du problème est l'étude de l'ensemble Γ des endomorphismes u de E vérifiant : $(x, u(x), u^2(x))$ est liée pour tout $x \in E$.

Partie I

On suppose dans cette partie que $n = 2$.

1) Montrer que si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est sous l'une des formes suivantes : $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

2) Si χ_u n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$ (donc $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), montrer que $\chi_u = X^2 - 2aX + a^2 + b^2$ où $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Partie II

A- On se propose de montrer que E ne peut pas être réunion finie de $\mathbb{K}$-sous espaces vectoriels de E tous distincts de E tels que $E = \bigcup_{1 \leq i \leq p} F_i$.

1) Justifier que l'on peut supposer F_1 non inclus dans $\bigcup_{2 \leq i \leq p} F_i$.

2) Soit $x_1 \in F_1 \setminus \bigcup_{2 \leq i \leq p} F_i$ et soit $y \in E$.

   a) Montrer qu'il existe $j \in \{1, ..., p\}$ et deux éléments distincts λ et μ de $\mathbb{K}$ tels que $x_1 + \lambda y$ et $x_1 + \mu y$ appartiennent à F_j.

   b) Prouver que j est égale à 1 et que $y \in F_1$.

3) Conclure.

B- 1) Soit x un vecteur fixé de E.

   i. Montrer que $\{P \in \mathbb{K}[X], P(u)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

   ii. En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire $\pi_{x,u}$ de $\mathbb{K}[X]$ de degré minimal vérifiant $\pi_{x,u}(u)(x) = 0$.

   iii. Si x est un vecteur propre de u, trouver $\pi_{x,u}$.

ROYAUME DU MAROC

Ecole Hassania des Travaux Publics

Concours d'Accès en 1ère Année

Réservé aux Titulaires du DEUG

- Epreuve de Mathématiques
- Durée : 3h

Lundi 11 Juillet 2011

D- On suppose que π_u n'est pas scindé dans $\mathbb{K}$ (donc $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

1) Vérifier que $Sp_{\mathbb{R}}(u)$ est vide et que n est pair. On posera $n = 2q$ où $q \in \mathbb{N}^*$.

2) Montrer qu'il existe $(x_1, ..., x_q) \in E^q$ tel que E soit somme directe des sous espaces vectoriels engendrés par $(x_i, u(x_i))$ où $i \in \{1, ..., q\}$.

3) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est sous la forme (2) :

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_q \end{pmatrix}$$

où $C_k = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $k \in \{1, ..., q\}$.

E- Finalement montrer que les éléments de Γ qui ne sont pas diagonalisables sont les endomorphismes représentés par une matrice de la forme (1) ou (2) dans une certaine base de E.

Problème II

On dit qu'une suite (a_n) est à variation bornée si la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ est convergente.

Partie I

A) Exemples :

A-1) Dire si la suite (a_n) est à variation bornée dans les cas suivants :

1. $a_n = \dfrac{1}{n}$.
2. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
3. $a_n = \dfrac{lnn}{n}$.

A-2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que la suite (n^α) soit à variation bornée.

B) Conditions nécessaires et suffisantes :

Soit (a_n) une suite réelle.

B-1) Démontrer que si (a_n) est à variation bornée, alors elle est convergente. Réciproque ?

B-2) On suppose que (a_n) est monotone et bornée ; Montrer que (a_n) est à variation bornée.

B-3) Démontrer que si la série $\sum a_n$ est absolument convergente, alors (a_n) est à variation bornée.

C) Une application :

C-1) Soit (ε_n) une suite à variation bornée de limite 0, et soit $\sum u_n$ une série dont la suite des sommes partielles est bornée. Montrer que la série $\sum \varepsilon_n u_n$ est convergente.

2) Montrer que pour tout $x \in E$, $\pi_{x,u}$ divise π_u, et en déduire que l'ensemble $\{\pi_{x,u}, x \in E\}$ est fini. On note ses éléments $\pi_{x_i,u}$ où $i \in \{1, ..., q\}$.

3) Vérifier alors que E est égal à la réunion des noyaux des endomorphismes $\pi_{x_i,u}(u), i \in \{1, ..., q\}$ et en déduire l'existence d'un élément $k \in \{1, ..., q\}$ tel que $\pi_{x_k,u}(u)$ soit l'endomorphisme nul.

4) En déduire que $\pi_{x_k,u} = \pi_u$.

C- Soit u un élément de Γ.

1) Que peut-on dire de Γ si $n = 2$?

2) Montrer que π_u est de degré 1 ou 2, et en déduire que le cardinal de $Sp_{\mathbb{K}}(u)$ est inférieur ou égal à 2 et que $Sp_{\mathbb{K}}(u)$ ne peut être vide que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n est pair.

3) Que peut-on dire de u si pour tout x de E, on a $(x, u(x))$ est liée ?

Dans la suite du problème, on suppose que u est un élément de Γ qui n'est pas une homothètie vectorielle de E.

Partie III

A- Montrer que π_u est de degré 2.

B- on suppose que π_u admet deux racines distinctes dans $\mathbb{K}$.

1) Montrer que u est diagonalisable.

2) Montrer que les seuls sous espaces vectoriels de E stables par u sont les sommes directes de sous espaces d'espaces propres.

3) Que peut-on dire de n s'il y a un nombre fini de sous espaces stables par u ?

C- On suppose que π_u admet une racine double λ dans $\mathbb{K}$.

1) Montrer que u est trigonalisable.

2) Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, montrer que $dim(ker(f^2)) \leq 2dim(ker f)$ (on pourra considérer la restriction de f sur $ker(f^2)$).

3) Soit H un supplémentaire de $ker(u - \lambda I_E)$ dans E. Montrer que :

   i. $1 \leq dimH \leq dim(ker(u - \lambda I_E))$.

   ii. $(u - \lambda I_E)(H) \subset ker(u - \lambda I_E)$.

   iii. $dimH = dim((u - \lambda I_E)(H))$.

4) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est sous la forme (1) :

$$\begin{pmatrix} \lambda I_p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_q \end{pmatrix}$$

où $A_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), i \in \{1, ..., q\}, q \geq 1$ et $p + 2q = n$ (p peut être éventuellement nul).

C-2) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n sinn}{\sqrt{(-1)^n + n}}$. convergente

Dans toute la suite du problème, on considère une suite bornée (x_n), et les suites définies par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad y_n = x_{n-1} - x_n \text{ et } z_n = x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n.$$

Partie II

On suppose dans cete partie que la suite (z_n) est positive.

1) 1-1) Etudier la monotonie de (y_n).

   1-2) Démontrer que (y_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

   1-3) Montrer que la suite (x_n) est convergente.

   1-4) En déduire que la suite (x_n) est à variation bornée.

2) Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $n > p$; Démontrer l'inégalité :

$$ny_n \leq 2(x_p - x_n)$$

3) En déduire la limite de la suite (ny_n).

4) Montrer que les séries $\sum y_n$ et $\sum nz_n$ sont convergentes et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} nz_n = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.

FIN

L'épreuve comporte trois parties indépendantes

Première partie : Mécanique

On considère un satellite, assimilé à un point matériel S, de masse m. le satellite est soumis à l'attraction gravitationnelle de la terre supposée sphérique, de centre O, de rayon R et de masse M. On suppose que m << M, la terre est alors supposée comme fixe.

1) 1-1) La force exercée par la terre sur S est $\vec{F} = -k\,\overrightarrow{OS}/(OS^3)$, donner l'expression de k en fonction de m, M et G la constante gravitationnelle.
   1-2) Quelle est l'unité SI de G ?
   1-3) Citer une autre force de nature newtonienne.
   1-4) On pose $\vec{r} = \overrightarrow{OS}$, déterminer l'énergie potentielle $E_p(r)$ dont dérive la force $\vec{F}$.

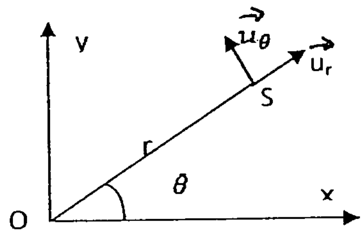


Figure 1

2) 2-1) Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_o}$ du satellite est constant.
   2-2) En déduire que la trajectoire du satellite est plane.
   On pourra faire l'étude en coordonnées polaires(r, θ, $z = 0$) de vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{u_z}$; $\overrightarrow{u_z}$ étant le vecteur unitaire orthogonal au plan de la trajectoire.
   2-4) Montrer que $r^2\,\dot{\theta}$ est une constante du mouvement que l'on notera C
3) 3-1) On pose u = 1/r, montrer que l'accélération a du satellite peut s'écrire :
   $\vec{a} = -C^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\overrightarrow{u_r}$ (Formule de Binet).
   3-2) Ecrire la relation fondamentale de la dynamique pour S, en déduire que l'équation de la trajectoire de S s'écrit $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$, donner l'expression de p en fonction de C, k et M.

4) On nomme périgée (P) le point de la trajectoire elliptique le plus proche de la terre et apogée (A) le point de la trajectoire le plus éloigné de la terre. On note (r_p, V_p) et (r_a, V_a) la position et la vitesse du satellite respectivement à son périgée et à son apogée. On supposera ra et rp très voisines .
   4-1) Calculer l'excentricité e du satellite en fonction de ra et rp.
   4-2) Calculer le rapport Vp/Va en fonction de e.

5) On suppose maintenant que la trajectoire est circulaire et uniforme de rayon r_0 et d'énergie mécanique E constante. Etablir l'expression de E et une relation simple entre l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p du satellite.

6) Le satellite subit des frottements sur les hautes couches de l'atmosphère ; ces frottements sont équivalents à une force de freinage de module $f = \mu m v^2$; m et v

ROYAUME DU MAROC

Ecole Hassania des Travaux Publics

Concours d'Accès en 1ère Année

Réservé aux Titulaires du DEUG

- Epreuve de Physique
- Durée : 3h

Lundi 11 Juillet 2011

1.5 Calculer l'énergie électrostatique de ce système de charges.

1.6 La sphère *(S)* coupe le segment *AB* en un point *H*. On suppose que *H* et *A* restant fixes, le point *O* s'éloigne indéfiniment sur la droite *AB*. En déduire les évolutions de la surface équipotentielle, de α et du champ électrostatique $\vec{E}$ sur cette surface. (on prendra $AH = l$)

Troisième partie : Electrocinétique

Un circuit électrique (Figure 1.) comprend une source alternative sinusoïdale de force électromotrice efficace *E*, de fréquence *f*, d'impédance interne négligeable, une résistance *R*, une inductance *L*, un condensateur variable de capacité C et un ampèremètre *A* de résistance négligeable.

1-1) Déterminer l'intensité i(t) du courant électrique qui traverse le circuit.

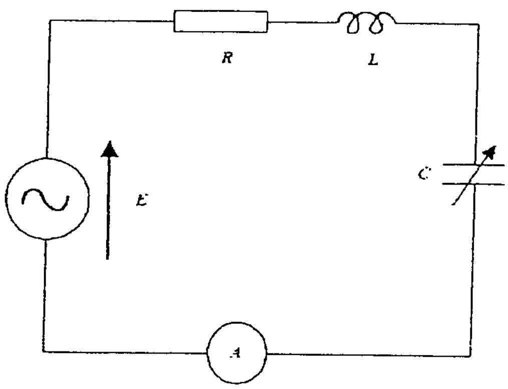
1-2) En faisant varier la capacité du condensateur, on constate que l'intensité efficace indiquée par l'ampèrermètre atteint une valeur maximale I_0 quand la capacité vaut C_0. Déterminer I_0 et C_0.

1-2) L'ampèremètre indique l'intensité efficace $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ pour deux valeurs C_1 et C_2 de la capacité du condensateur. Exprimer en fonction de C_1 et C_2, le coefficient *Q* de surtension (ou facteur de qualité) du circuit et calculer sa valeur numérique.

1-4) La fréquence *f* étant connue, déterminer les valeurs de la résistance *R* et de l'inductance *L* en fonction de C_1, C_2 et *f*.

APPLICATION NUMERIQUE : $C_1 = 120$ nF ; $C_2 = 130$ nF ; f = 100 kHz

Figure 1



étant la masse et la vitesse du satellite , μ est une constante positive. Ce freinage est très faible, et on peut supposer que les révolutions restent presque circulaires et que pour chacune d'elle, l'altitude h du satellite diminue de Δh avec Δh << h. l'altitude h est comptée à partir de la surface de la terre : r = R + h.

6-1) Calculer la variation de la vitesse Δv du satellite en fonction de Δh et de la période T du satellite.

6-2) Justifier l'évolution de la vitesse du satellite.

6-3) Exprimer μ en fonction de h, Δh et R.

7) En remarquant que la perte relative d'énergie mécanique du satellite est faible à chaque révolution, calculer le temps τ au bout duquel le satellite s'écrasera sur la terre.
On fera l'hypothèse simplificatrice que la loi de frottement reste la même pendant toute la chute.

8) La trajectoire du satellite peut être décrite dans son plan de trajectoire par l'équation en coordonnées polaires $r = r_0 e^{-\alpha\theta}$.

8-1) Exprimer α en fonction de Δh, R et h.

8-2) Exprimer en fonction de r_0 et α, la distance D parcourue par le satellite au cours d'une quasi-révolution. On pourra mettre en évidence ce résultat comme la distance d'une orbite circulaire affectée d'un terme correctif, en tenant compte de l'ordre de grandeur de α

Deuxième partie : Electrostatique

En deux points *A* et *B* de l'espace sont disposées les charges électriques suivantes :
une charge *q* positive au point *A* et une charge négative $-\alpha q$ au point *B*.
On désigne par *d* la distance *AB* et α un nombre positif compris strictement entre *O* et *1* $(0<\alpha<1)$.
Un point P de l'espace est défini par $PA = r$ et $PB = r'$.

1-1) Définir le potentiel électrostatique au point *P*. (par convention de potentiel coulombien, l'on prendra $V = O$ à l'infini.).

1-2) Montrer que la surface équipotentielle de potentiel nul est une sphère *(S)* où l'on déterminera son centre *O* et son rayon *R* ; Calculer $a = \overline{AO}$ et *R* en fonction de α et *d*. En déduire que $R = a\alpha$.

1.3 Déterminer en fonction de *q, d, r* et α le champ électrostatique résultant $\vec{E}$ créé par les charges précédentes en un point *P* de la sphère*(S)*. Applications numériques avec $q=10^{-11}$ C, $d = 10cm$, r = 8cm et $\alpha = 0,5$. Vous représenterez sur un schéma à l'échelle, la trace de la sphère *(S)* dans le plan et les champs minimal et maximal résultants.

1.4 En déduire l'intensité de ce champ en fonction de *q, a, R, r*.

5) Vérifier, à l'aide de la formule de LEIBNIZ, que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, L_n(X) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,X^n}\left[\left(X^2-1\right)^n\right].$$

6) En déduire explicitement le coefficient dominant de L_n, puis la relation
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

7) Montrer alors que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |L_n(x)| \leqslant \left(\frac{1+|x|}{2}\right)^n \binom{2n}{n}.$$

8) On définit, pour tout entier naturel n, le polynôme $U_n(X) = \left(X^2-1\right)^n$.

a) Vérifier que :
$$\left(X^2-1\right)U_n'(X) = 2nXU_n(X).$$

b) En dérivant $n+1$ fois cette relation, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi(L_n) = n(n+1)L_n.$$

Partie C : Définition d'un produit scalaire

On pose
$$\forall (P,Q) \in E^2, \langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\ \mathrm{d}\,x.$$

1) Justifier que l'on a ainsi défini un produit scalaire sur E.

Dans toute la suite du problème, l'espace E et ses sous-espaces E_n $(n \in \mathbb{N})$ seront systématiquement munis de ce produit scalaire.

2) a) Montrer que
$$\forall (P,Q) \in E^2, \langle \phi(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1}(1-x^2)P'(x)Q'(x)\ \mathrm{d}\,x.$$

b) Que peut-on dire déduire pour les endomorphismes φ_n $(n \in \mathbb{N})$?

c) En déduire, à l'aide d'un résultat de la partie B, que les polynômes L_p $(p \in \mathbb{N})$ sont deux à deux orthogonaux.

3) Soit n un entier naturel.

a) Établir par récurrence sur k que
$$\forall k \in [\![0,n]\!], \langle Q, L_n\rangle = \frac{(-1)^k}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\,x^k}\left[Q(x)\right]\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}\,x^{n-k}}\left[(x^2-1)^n\right]\ \mathrm{d}\,x.$$

b) En déduire que, poour tout $n \in \mathbb{N}^*$, L_n est orthogonal à E_{n-1}.

c) Retrouver ainsi que les polynômes L_p $(p \in \mathbb{N})$ sont deux à deux orthogonaux.

4) a) À l'aide de C.3)a), exprimer, pour tout entier naturel n, $\|L_n\|^2$ en fonction de
$$I_n = \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\ \mathrm{d}\,x.$$

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = -\frac{2n+2}{2n+3}I_n.$$

c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de I_n faisant intervenir des factorielles.

d) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

5) Donner, pour tout entier naturel n, une base orthonormée de E_n.

Les calculatrices sont interdites

* * * * *

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans tout le problème, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels.
Pour tout entier naturel n, on note E_n le sous-espace de E formé par les polynômes de degré au plus égal à n.
Selon l'usage, on convient d'identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.
L'espace E_n est muni de sa base canonique $\mathscr{B}_n = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$.
Les coefficients binomiaux sont notés $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

Partie A : Étude d'un endomorphisme

Étant donné un polynôme P de E, on définit un polynôme $\phi(P)$ par :

$$[\phi(P)](X) = (X^2 - 1)\, P''(X) + 2XP'(X).$$

1) Justifier qu'on a ainsi défini un endomorphisme ϕ de E.
2) Montrer que, pour tout entier naturel n, le sous-espace vectoriel E_n est stable par ϕ.

On notera désormais φ_n l'endomorphisme de E_n induit par ϕ sur E_n :

$$\forall P \in E_n, \varphi_n(P) = \phi(P)$$

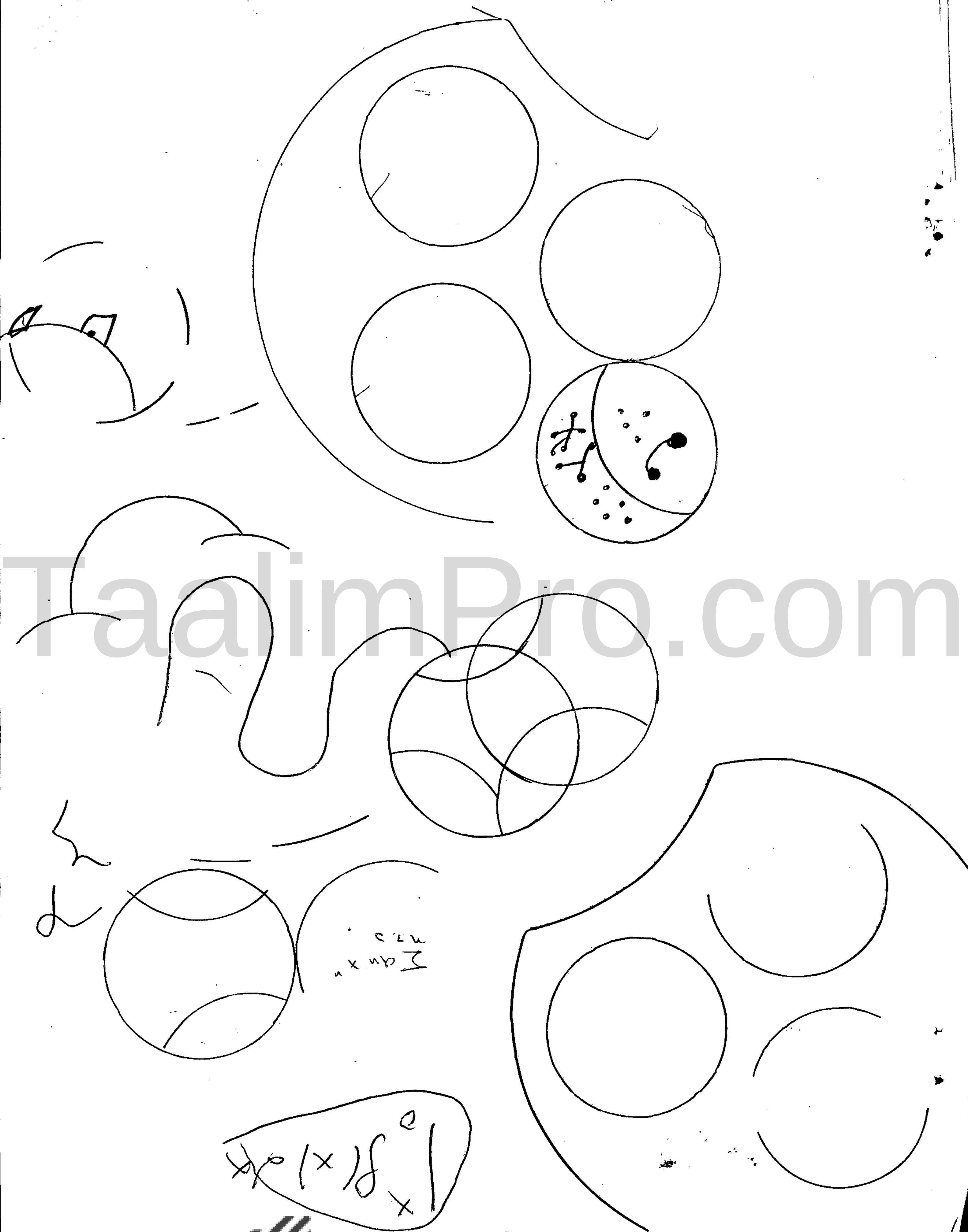
3) Dans cette question, on suppose que n est égal à 3.
   a) Écrire la matrice M_3 de φ_3 dans la base canonique de E_3.
   b) Justifier que φ_3 est diagonalisable.
   c) Déterminer une base de E_3 diagonalisant φ_3, formée de polynômes de coefficients dominants égaux à 1.
4) On revient au cas général d'un entier naturel n quelconque.
   a) Montrer que la matrice M_n de φ_n dans la base canonique est triangulaire supérieure et préciser ses coefficients diagonaux.
   b) En déduire que φ_n est diagonalisable et préciser les dimensions de ses sous-espaces propres.

Partie B : Étude d'une famille de polynômes

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme L_n par

$$L_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

1) Calculer sous forme simplifiée les polynômes L_0, L_1, L_2 et L_3.
2) Calculer $L_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Déterminer le degré de L_n en fonction de n ($n \in \mathbb{N}$) et donner son coefficient dominant sous la forme d'une somme.
4) En utilisant un changement d'indice, montrer que L_n a la même parité que n.



Partie D : Une relation de récurrence

Soit n un entier naturel non nul.

1) Calculer le coefficient de X^{n+1} dans $(n+1)L_{n+1}(X)-(2n+1)XL_n(X)$.

2) En déduire l'existence et l'unicité de $n+1$ réels α_k tels que
$$(n+1)L_{n+1}(X)-(2n+1)XL_n(X)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k L_k(X).$$

3) Montrer que $\forall k\in[|0,n|]\,,\alpha_k=-(2n+1)\dfrac{\langle XL_n,L_k\rangle}{\|L_k\|^2}$.

4) Pour tout $k\in[|0,n-2|]$, vérifier que $\langle XL_n,L_k\rangle=\langle L_n,XL_k\rangle$ puis montrer que $\alpha_k=0$.

5) Par des considérations de parité, montrer que $\alpha_n=0$.

6) En utilisant la valeur des polynômes L_k au point 1, déterminer alors α_{n-1}.

7) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*, (n+1)L_{n+1}(X)-(2n+1)XL_n(X)+nL_{n-1}(X)=0$.

Partie E : Fonction génératrice

On fixe un réel t et on considère la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} L_n(t)x^n$, de la variable réelle x.

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\dfrac{1+|t|}{2}\right)^n\binom{2n}{n}x^n$.

2) En déduire que le rayon de convergence R_t de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} L_n(t)x^n$ est strictement positif.

On donnera une minoration de R_t, mais on ne cherchera pas à le calculer.

On note S_t la somme de cette série entière : $\forall x\in\,]-R_t,R_t[\,, S_t(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}L_n(t)x^n$

3) En utilisant le résultat de D.7), montrer que S_t est solution sur $]-R_t,R_t[$ de l'équation différentielle suivante, d'inconnue y fonction de x :
$$(\mathscr{E}_t)\ (1-2tx+x^2)y'(x)+(x-t)y(x)=0$$

4) Pour $|t|<1$, en déduire l'expression de $S_t(x)$ en fonction de x.

Partie F : Projection orthogonale, calcul de distance

1) Calculer, pour tout entier naturel k, l'intégrale
$$J_k=\int_{-1}^{1}x^k\,\mathrm{d}x.$$

2) Étant donnés deux entiers naturels n et r, tels que $0\leqslant r\leqslant n$, on note p_r la projection orthogonale de E_n sur son sous-espace vectoriel E_r.

Donner une expression générale de $p_r(P)$ utilisant le produit scalaire, pour tout polynôme P de E_n.

3) On suppose désormais $n=3$ et $P=X^3$.

a) Déterminer $p_0(P)$, $p_1(P)$ et $p_2(P)$.

b) Calculer les distances $d(P,E_k)$ de P aux sous-espaces vectoriels E_k pour tout entier k tel que $0\leqslant k\leqslant 2$.

4) On note G l'ensemble des polynômes de degré 3 et de coefficient dominant égal à 1.

Montrer l'existence de
$$m=\min_{Q\in G}\int_{-1}^{1}(Q(x))^2\,\mathrm{d}x$$
et préciser sa valeur, ainsi que les polynômes réalisant ce minimum.

Fin de l'énoncé